Teoría de operadores

Taller 2

Integral de Riemann-Stieltjes;
resolución de la identidad.

Fecha de entrega: 28 de agosto de 2020
en este enlace

---

1. Sea $\alpha \in \mathrm{BV}[a,b]$, $f \in I[a,b]$ y defina $K : [a,b] \to \mathbb{K}$ por $K(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\alpha(t)$ para $x \in (a,b]$ y $K(a) := 0$. Muestre:
   (a) $K \in \mathrm{BV}[a,b]$.
   (b) Si α es continua por la derecha en $s \in [a,b)$, entonces K también lo es.
   (c) $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}K(t) = \int_a^b (fg)(t)\,\mathrm{d}\alpha(t)$ para todo $g \in I[a,b]$.

2. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$ un operador compacto autoadjunto con autovalores distintos μ_j. Sea P_j la proyección ortogonal sobre el espacio propio de T respecto a λ_j. Muestre que $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ es una resoluión de la identidad[1] donde

$$E_\lambda x := \begin{cases} \sum_{\lambda_j \le \lambda} P_j x, & \lambda < 0, \\ x - \sum_{\lambda_j > \lambda} P_j x, & \lambda \ge 0, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ x \in H.$$

3. Sea H un espacio de Hilbert, $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ una resolución de la identidad en H y $\varphi : \mathbb{R} \to (a,b)$ una biyección continua no decreciente. Suponga que $E_a = 0$ y $E_{b-0} = E_b = I$. Muestre que $(F(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ es una resoluión de la identidad en H donde

$$F_\lambda := E_{\varphi(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Definición 1. Sea $(\Omega, \mathfrak{A})$ un espacio medible (es decir $\mathfrak{A}$ es una σ-algebra sobre Ω) y sea H un espacio de Hilbert. Una función $E : \mathfrak{A} \to L(H)$ se llama *medida espectral* si

(I) $E(M)$ es una proyección ortgonal para todo $M \in \mathfrak{A}$,

(II) $E(\varnothing) = 0$, $E(\Omega) = \mathrm{id}$,

(III) $E(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n)x = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(M_n)x$ para $M_j \in \mathfrak{A}$ disjuntos dos a dos y para todo $x \in H$.

4. (a) Sea $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $H = \mathscr{L}_2(\Omega)$. Demuestre que $E : \mathfrak{A} \to L(H)$ definida por $E(M)f := \chi_M f$ para todo $M \in \mathfrak{A}$ y $f \in H$ es una medida espectral.
   (b) Sea $(\Omega, \mathfrak{A})$ un espacio medible, H un espacio de Hilbert y y $E : \mathfrak{A} \to H$ una medida espectral. Demuestre que $E(M \cap N) = E(M)E(N)$ para todo $M, N \in \mathfrak{A}$.

[1] lo definiremos el lunes en clase