

Teoría de operadores

Taller 12

Shift semigrupo, semigrupo de multiplicación.

Fecha de entrega: 6 de noviembre 2015

1. Define el semigrupo $\mathcal{T} = (T(t))_{t \geq 0}$ por

$$(T(t)f)(\xi) = f(\xi + t), \quad f \in X, \xi \in \mathbb{R}.$$

(a) Muestre que \mathcal{T} es un semigrupo fuertemente continuo, pero no uniformemente continuo si $X = BUC(\mathbb{R})$ o $X = L_p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$.

(BUC := bounded uniformly continuous functions on \mathbb{R}).

(b) Muestre que \mathcal{T} no es fuertemente continuo si $X = L_\infty(\mathbb{R})$.

2. Sea Ω un dominio en \mathbb{C} y $q \in C(\Omega)$ una función con $\sup_{\xi \in \Omega} \{\operatorname{Re} q(\xi)\} < \infty$. Sea $X = C_0(\Omega)$ con la norma del supremo y $M(X \rightarrow X)$ el operador maximal de multiplicación con la función q y define $\mathcal{T} = (T(t))_{t \geq 0}$ por

$$(T(t)f)(\xi) = e^{tq(\xi)} f(\xi), \quad f \in X, \xi \in \Omega.$$

(a) Muestre que \mathcal{T} es un semigrupo fuertemente continuo.

(b) Muestre que M es el generador de \mathcal{T} .

3. Con la notación del ejercicio 12.2, muestre:

(a) \mathcal{T} es un semigrupo uniformemente continuo si q es acotada.

(b) \mathcal{T} no es uniformemente continuo si no q no es acotada.

4. Sea X un espacio de Banach y $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto. Para una función $F : K \rightarrow L(X)$ lo siguiente es equivalente:

(a) F es fuertemente continua.

(b) F es uniformemente acotada en K y existe un subconjunto denso $D \subseteq X$ tal que para todo $x \in D$ el siguiente mapa es continuo:

$$K \rightarrow X, \quad t \mapsto F(t)x.$$

(c) Para cada subconjunto compacto $C \subseteq X$ el siguiente mapa es uniformemente continuo:

$$K \times C \rightarrow X, \quad (t, x) \mapsto F(t)x.$$