Teoría de operadores

Taller 11

Estabilidad de indices de defecto;
$\exp(tA)$.

Fecha de entrega: 30 de octubre de 2015

1. Sea H un espacio de Hilbert, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ y $K \in L(H)$ un operador compacto. Suponga que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a x_0. Muestre que $(Kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. Sea H un espacio de Hilbert complejo, $T, S(H \to H)$ operadores simétricos. Suponga que S es T-acotado con T-cota < 1. Muestre que $n_+(T+S) = n_+(T)$ y $n_-(T+S) = n_-(T)$.

   Hints. Basta mostrar que $\dim(\operatorname{rg}(T \pm \mathrm{i}\lambda)^\perp) = \dim(\operatorname{rg}(T+S \pm \mathrm{i}\lambda)^\perp)$ para un/todo $\lambda > 0$. Para mostrar $\dim(\operatorname{rg}(T+S \pm \mathrm{i}\lambda)^\perp) \le \dim(\operatorname{rg}(T \pm \mathrm{i}\lambda)^\perp)$, se puede escoger, por ejemplo, $\lambda = a/b$ con a, b tal que $b < 1$ y $\|Sx\|^2 \le a^2\|x\|^2 + b^2\|Tx\|^2$ para $x \in \mathcal{D}(T)$.

   Para mostrar que $\dim(\operatorname{rg}(T+S \pm \mathrm{i}\lambda)^\perp) \ge \dim(\operatorname{rg}(T \pm \mathrm{i}\lambda)^\perp)$ muestre que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n}S$ tiene $(T+\mu S)$-cota < 1 para todo $\mu \in [0,1]$. Concluye que

$$\begin{aligned}\dim\left(\operatorname{rg}\left(T+S\pm \mathrm{i}\lambda\right)^\perp\right) &= \dim\left(\operatorname{rg}\left((T+\frac{n-1}{n}S)+\frac{1}{n}S\pm \mathrm{i}\lambda\right)^\perp\right)\\ &\ge \dim\left(\operatorname{rg}\left((T+\frac{n-1}{n}S)\pm \mathrm{i}\lambda\right)^\perp\right) \ge \dots .\end{aligned}$$

3. Muestre que cada solución continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de

$$f(s+t) = f(s)f(t)$$

   es diferenciable y por tanto es de la forma $f(t) = ce^{ta}$.

4. Sea X un espacio de Banach complejo y $A \in L(X)$ un operador lineal acotado y $t \in \mathbb{R}$. Sea Γ una curva de Jordan rectificable y positivamente orientada tal que encierra el espectro de A. Muestre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma \mathrm{e}^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} \, \mathrm{d}\lambda. \tag{$*$}$$

   Si X es un espacio de Hilbert y A es autoadjunto, el operador en $(*)$ coincide con $\exp(tA)$ definido a través del cálculo funcional.