

Teoría de operadores

Taller 10

Operadores con inversa compacta;
operadores relativamente acotados/compactos.

Fecha de entrega: 23 de octubre 2015

1. Sea X un espacio de Banach y $T(X \rightarrow X)$ un operador lineal cerrado. Sea $S(X \rightarrow X)$ con $\mathcal{D}(S) \supseteq \mathcal{D}(T)$ y $z \in \varrho(T)$. Muestre que S es T -compacto si y solo si $S(T - z)^{-1}$ es compacto.
2. Sea H un espacio de Hilbert complejo, $T(H \rightarrow H)$ un operador autoadjunto y semiacotado por abajo con cota inferior γ (es decir, $\langle Tx, x \rangle \geq \gamma \|x\|^2$ para todo $x \in \mathcal{D}(T)$). Sea $S(H \rightarrow H)$ un operador simétrico y T -acotado con T -cota < 1 . Muestre que $T + S$ es semiacotado por abajo.
3. Muestre que existen espacios de Hilbert H_1, H_2 , y un operador lineal $T(H_1 \rightarrow H_2)$ y un operador S tal que S es T -compacto con T -cota 1.
Hint. Considere un funcional lineal no acotado en H_1 .
4. Sea X un espacio de Banach, $T(X \rightarrow X)$ un operador cerrado con $\varrho(T) \neq \emptyset$ y $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}(T)$. Muestre que \mathcal{D}_0 es un *core*¹ of T si y solo si $(T - \lambda)\mathcal{D}_0$ es denso en X para un (para todo) $\lambda \in \varrho(T)$.

Ejercicio voluntario

5. Let $X = \ell_p(\mathbb{Z})$ and let $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be the standard unit vectors in X . Defina operadores lineales T y A por

$$\begin{aligned} T : X &\rightarrow X, & Tx_0 &:= 0, & Tx_n &:= x_{n-1}, & n &\neq 0, \\ A : X &\rightarrow X, & Ax_0 &:= x_{-1}, & Ax_n &:= 0, & n &\neq 0. \end{aligned}$$

- (a) Muestre que $\sigma_p(T) = \{|z| < 1\}$, $\sigma_c(T) = \{|z| = 1\}$, $\sigma_r(T) = \emptyset$.
- (b) Muestre que $\sigma_p(T + \varepsilon A) = \emptyset$, $\sigma_c(T + \varepsilon A) = \{|z| = 1\}$, $\sigma_r(T + \varepsilon A) = \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$.

Hint. Muestre que $T + \varepsilon A$ es invertible y calcule el radio espectral del operador inverso.

¹Un subespacio $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}(T)$ es un *core* del operador cerrado T si la clausura de la restricción $T|_{\mathcal{D}_0}$ es igual a T .