Universidad de los Andes, MATE-4241

Teoría de operadores

Taller 9

Indices de defecto; extensiones autoadjuntas.

Fecha de entrega: 16 de octubre 2015

---

1. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $S(H \to H)$ un operador lineal densamente definido y clausurable. Muestre que $\Gamma(S) = \Gamma(\overline{S})$ y que $n(S, \lambda) = n(\overline{S}, \lambda)$ para todo $\lambda \in \Gamma(S)$. Concluya que $n(S, \cdot)$ es constante en componentes conexas de $\Gamma(S)$.

2. Sea H un espacio de Hilbert complejo, $S(H \to H)$ un operador simétrico con indices de defecto $n_+(S) = n_-(S) = m < \infty$.

   (i) Sean T_1, T_2 extensiones autoadjuntas de S y $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{rg}(T_1 - \lambda)$ no es cerrado. Muestre que $\operatorname{rg}(T_2 - \lambda)$ tampoco lo es. Concluya que $\sigma_c(T_1) \subseteq \sigma(T_2)$ y $\sigma_c(T_2) \subseteq \sigma(T_1)$.

   (ii) Sea $\lambda \in \Gamma(S) \cap \mathbb{R}$. Muestre que existe una extensión autoadjunta T de S tal que λ es un autovalor de T de dimensión finita.

   Hint. $\dim(\ker(S^* - \lambda)) = ?$

3. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $S(H \to H)$, $T(H \to H)$ operadores autoadjuntos. Suponga que existe un $z \in \varrho(S) \cap \varrho(T)$ tal que $(S - z)^{-1} - (T - z)^{-1}$ es compacto.

   (a) Muestre que $(S - \lambda)^{-1} - (T - \lambda)^{-1}$ es compacto para todo $\lambda \in \varrho(S) \cap \varrho(T)$.

   (b) Muestre que $\sigma_{\text{ess}}(S) = \sigma_{\text{ess}}(T)$.

4. Sean X, Y, Z espacios de Banach y $T(X \to Y)$, $S(X \to Z)$ operadores lineales. Muestre que S es T-acotado si y solo si $\mathcal{D}(S) \supseteq \mathcal{D}(T)$ y existe $\alpha, \beta \geq 0$ tal que

$$\|Sx\|^2 \leq \alpha^2 \|x\|^2 + \beta^2 \|Tx\|^2, \qquad x \in \mathcal{D}(T). \tag{$*$}$$

   Muestre que el ínfimo de todo los $\beta > 0$ que satisfacen $(*)$ para un $\alpha \geq 0$ es igual a la T-cota de S.

   Hint. Muestre que $2xy \leq c^2 x^2 + c^{-2} y^2$ for $c, x, y \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.