Universidad de los Andes, MATE-4241

Teoría de operadores

Taller 8

Integral de Bochner; spectral sets.

Fecha de entrega: 9 de octubre 2015

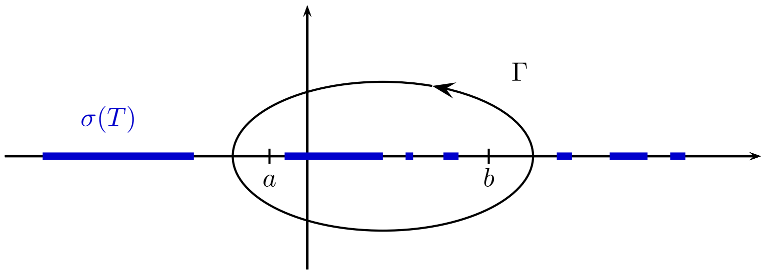
---

1. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $T(H \to H)$ un operador autoadjunto. Sea $z \in \varrho(T)$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$. Muestre que $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(T)$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ tal que

$$x_n \not\to 0, \quad x_n \xrightarrow{w} 0 \quad \text{and} \quad \big((T-z)^{-1} - (\lambda - z)^{-1}\big)x_n \to 0 \qquad \text{for } n \to \infty.$$

2. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $T(H \to H)$ un operador lineal autoadjunto. Sea $a, b \in \varrho(T) \cap \mathbb{R}$ y Γ una curva de Jordan simple rectificable y positivamente orientada tal que encierra a $(a,b) \cap \sigma(T)$ y que el resto del espectro está fuera de Γ. Muestre

$$E(b) - E(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma (\lambda - T)^{-1}\, \mathrm{d}\lambda.$$



3. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$ un operador acotado. Sea Γ una curva de Jordan simple rectificable y positivamente orientada tal que encierra $\sigma(T)$. Muestre:

$$T^n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma \lambda^n (\lambda - T)^{-1}\, \mathrm{d}\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{N}_0.$$

4. Sea X un espacio de Banach y $T(X \to X)$ un operador lineal cerrado. Un *conjunto espectral* (*spectral set*) es un subconjunto Σ de $\sigma(T)$ tal que Σ y $\sigma(T) \setminus \Sigma$ con cerrados en el plano complejo extendido. Sea Σ un conjunto espectral de T acotado y Γ una curva de Jordan rectificable en $\varrho(T)$ tal que encierre Σ y $\sigma(T) \setminus \Sigma$ queda fuera de Γ. Muestre que $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma (\lambda - T)^{-1}\, \mathrm{d}\lambda$ es una proyección que conmuta con T.