Universidad de los Andes, MATE-4241

Teoría de operadores

Taller 4

Teorema espectral; cálculo funcional.

Fecha de entrega: 4 de septiembre 2015

---

1. Sea $R : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N}),\ R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ para $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell_2(\mathbb{N})$. Existe un operador $A \in L(\ell_2(\mathbb{N}))$ tal que $A^2 = S$?

2. Sea A un operador autoadjunto acotado en un espacio de Hilbert complejo$H$ con resolución espectral $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Muestre que A es compacto si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ la proyección $E(\{|\lambda| > \varepsilon\})$ tiene rango finito.

3. Sean A y B operatores acotadas autoadjuntas en un espacio de Hilbert H con resoluciones espectrales $(E_A(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ y $(E_B(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Si $A \geq B$, entonces[1] $\dim E_A(\lambda) \leq \dim E_B(\lambda)$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Sea H un espacio e Hilbert y $A \in L(H)$.

   (a) Muestre que $\operatorname{Exp}(A) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ converge en norma. Muestre que $\big(\operatorname{Exp}(A)\big)^* = \operatorname{Exp}(A^*)$. En particular, $\operatorname{Exp}(A)$ es autoadjunto y $\big(\operatorname{Exp}(\mathrm{i}A)\big)^* = \operatorname{Exp}(-\mathrm{i}A)$ si A es autoadjunto.

   (b) Muestre que $\operatorname{Exp}(A) = \exp(A)$ si A es autoadjunto y $\exp(A)$ es definido a traves del cálculo funcional.

---

[1] usando la notación $\dim P := \dim(\operatorname{rg} P)$ para una proyección ortogonal P.