

Teoría de operadores

Taller 3

Cálculo funcional.

Fecha de entrega: 28 de agosto de 2015

1. Sea H un espacio de Hilbert complejo, $A \in L(H)$ un operador autoadjunto y $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\sigma(A) \subseteq [a, b]$. Sea $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio y \bar{p} el polinomio que se obtiene al conjugar los coeficientes de p . Demuestre:

- (a) $p(A)^* = \bar{p}(A)$.
- (b) $\|p(A)\| \leq \|p\|_\infty$. ¿Se tiene igualdad?

2. (a) Sea H un espacio de Hilbert, sean $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow (a, b)$, $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ y $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ como en problema 3 del taller 2. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_{[a_0, b_0]} \subseteq I[a_0, b_0]$ para cada subintervalo compacto $[a_0, b_0]$ de (a, b) . Muestre:

- (i) $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(\lambda) dE_\lambda = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(\lambda) dF_\lambda$ para todo $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$.
- (ii) Sea $x \in H$. Entonces $\int_{a+0}^{b-0} f(\lambda) dE_\lambda x$ existe si y solo si $\int_{-\infty}^\infty (f \circ \varphi)(\lambda) dF_\lambda x$ existe.¹

(b) Sea H un espacio de Hilbert y $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ creciente y continua y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sea $A \in L(H)$ un operador autoadjunto y $B := \varphi(A)$. Muestre $(f \circ \varphi)(A) = f(B)$.

3. Sea $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y sea $A : L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ definido por

$$(Ax)(t) := a(t)x(t), \quad t \in (0, 1), \quad x \in L_2(0, 1).$$

- (a) Muestre que A es autoadjunto.
- (b) Encuentre $m := \inf_{x \in H, \|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$ y $M := \sup_{x \in H, \|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$.
- (c) Encuentre el espectro de A .

4. Sea A como en el ejercicio 3. Encuentre la resolución espectral de A .

$${}^1 \int_{a+0}^{b-0} f(\lambda) dE_\lambda x := \lim_{\substack{\lambda_1 \searrow a \\ \lambda_2 \nearrow b}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda) dE_\lambda, \quad \int_{-\infty}^\infty (f \circ \varphi)(\lambda) dF_\lambda x := \lim_{\substack{\lambda_1 \searrow -\infty \\ \lambda_2 \nearrow \infty}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (f \circ \varphi)(\lambda) dF_\lambda x$$