Universidad de los Andes, MATE-4241

Teoría de operadores

Taller 1

Fecha de entrega: 14 de agosto 2015

---

1. Sea H un espacio de Hilbert. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores ortogonales dos a dos en H, entonces lo siguiente es equivalente:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en H.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||^2 < \infty$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y\rangle$ converge para cada $y \in H$.

2. Sean P_1 y P_2 proyecciones ortogonales en el espacio de Hilbert H. Entonces tenemos que

$$\|P_1 - P_2\| = \max\{\varrho_{12},\ \varrho_{21}\}$$

   donde

$$\varrho_{jk} := \sup\Big\{\|P_j x\|\ :\ x \in \operatorname{rg}(P_k)^{\perp},\ \|x\| \le 1\Big\}.$$

3. Si P y Q son proyecciones ortogonales en el espacio de Hilbert H tales que $\|P - Q\| < 1$, entonces

$$\dim(\operatorname{rg} P) = \dim(\operatorname{rg} Q), \quad \dim(\operatorname{rg}(I-P)) = \dim(\operatorname{rg}(I-Q)).$$

4. Sea S el right shift en $\ell_2(\mathbb{Z})$ definido por

$$(Sx)_k = x_{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

   donde $x = (x_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ pertenece a $\ell_2(\mathbb{Z})$. Determine $\sigma_{\mathrm{p}}(S)$, $\sigma_{\mathrm{c}}(S)$, $\sigma_{\mathrm{r}}(S)$.