

Teoría de operadores

Taller 13

Yosida approximants; shift semigrupo.

Fecha de entrega: 16 de noviembre 2012

1. Sea X un espacio de Banach, $A(X \rightarrow X)$ un operador lineal y $\omega \in \mathbb{R}$ tal que $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \omega\} \subseteq \varrho(A)$ y $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{(\text{Re}\lambda - \omega)}$. Para $\lambda > \omega$ defina $A_\lambda := \lambda A(\lambda - A)^{-1}$. Muestre:

- (a) $A_\lambda \in L(X)$,
- (b) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(\lambda - A)^{-1}x = x, x \in X$,
- (c) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax, x \in \mathcal{D}(A)$.

2. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $\mathcal{T} = (T(t))_{t \geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo y acotado en X (es decir, existe un $R \in \mathbb{R}$ tal que $\|T(t)\| \leq R$ para todo $t \geq 0$). Entonces

$$\|x\|_{\mathcal{T}} := \sup\{\|T(s)x\| : s \geq 0\}, \quad x \in X,$$

define una norm que es equivalente a $\|\cdot\|$.

3. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $\mathcal{T} = (T(t))_{t \geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo y acotado en X . Muestre que existe un norma $\|\cdot\|_1$ en X que es equivalente a $\|\cdot\|$ tal que \mathcal{T} es un semigrupo de contracción con respecto a la norma $\|\cdot\|_1$.

4. Sea $X = \{f \in C[0, 1] : f(1) = 0\}$ y

$$T(t) : X \rightarrow X, \quad T(t)f(\xi) = \begin{cases} f(\xi + t), & \text{si } 0 \leq \xi + t \leq 1, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Muestre que $(T(t))_{t \geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo en X . Halle su generador y su cota de crecimiento (growth bound).