Teoría de operadores

Taller 12

Shift semigrupo, semigrupo de multiplicacón.

Fecha de entrega: 9 de noviembre 2012

---

1. Define el semigrupo $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ por

$$(T(t)f)(\xi) = f(\xi + t), \qquad f \in X,\ \xi \in \mathbb{R}.$$

   (a) Muestre que $\mathcal{T}$ es un semigrupo fuertemente continuo, pero no uniformemente continuo si $X = BUC(\mathbb{R})$ o $X = L_p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$.

   ($BUC :=$ bounded uniformly continuous functions on $\mathbb{R}$).

   (b) Muestre que $\mathcal{T}$ no es fuertemente continuo si $X = L_\infty(\mathbb{R})$.

2. Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y $q \in C(\Omega)$ una función con $\sup_{\xi\in\Omega}\{\operatorname{Re} q(\xi)\} < \infty$. Sea $X = C_0(\Omega)$ con la norma del supremo y $M(X \to X)$ el operador maximal de multiplicación con la función q y define $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ por

$$\big(T(t)f\big)(\xi) = \mathrm{e}^{tq(\xi)} f(\xi), \qquad f \in X,\ \xi \in \Omega.$$

   (a) Muestre que $\mathcal{T}$ es un semigrupo fuertemente continuo.

   (b) Muestre que M es el generador de $\mathcal{T}$.

3. Con la notación del ejercicio 12.2, muestre:

   (a) $\mathcal{T}$ es un semigrupo uniformemente continuo si q es acotada.

   (b) $\mathcal{T}$ no es uniformemente continuo si no q no es acotada.

4. Sea X un espacio de Banach y $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto. Para una función $F : K \to L(X)$ lo siguiente es equivalente:

   (a) F es fuertemente continua.

   (b) F es uniformemente acotada en K y existe un subconjunto denso $D \subseteq X$ tal que para todo $x \in D$ el siguiente mapa es continuo:

$$K \to X, \quad t \mapsto F(t)x.$$

   (c) Para cada subconjunto compacto $C \subseteq X$ el siguiente mapa es uniformemente continuo:

$$K \times C \to X, \quad (t, x) \mapsto F(t)x.$$