Universidad de los Andes, MATE-4241

Teoría de operadores

Taller 9

Operadores con inversa compacta;
operadores relativamente acotados, compatos.

Fecha de entrega: 19 de octubre 2012

---

1. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $T(H \to H)$ autoadjunto. Suponga que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $(T - \lambda)^{-1}$ es compacto. Muestre:

   (i) $(T - \mu)^{-1}$ es compacto para todo $\mu \in \varrho(T)$.

   (ii) $\sigma(T) = \sigma_p(T)$, los autovalores no tienen un punto de acumulación y cada autovalor tiene multiplicidad finita.

2. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $S(H \to H)$, $T(H \to H)$ operadores autoadjuntos. Suponga que existe un $z \in \varrho(S) \cap \varrho(T)$ tal que $(S - z)^{-1} - (T - z)^{-1}$ es compacto.

   (a) Muestre que $(S - \lambda)^{-1} - (T - \lambda)^{-1}$ es compacto para todo $\lambda \in \varrho(S) \cap \varrho(T)$.

   (b) Muestre que $\sigma_{\text{ess}}(S) = \sigma_{\text{ess}}(T)$.

3. Sean X, Y, Z espacios de Banach y $T(X \to Y)$, $S(X \to Z)$ operadores lineales. Muestre que S es T-acotado si y solo si $\mathcal{D}(S) \supseteq \mathcal{D}(T)$ y existe $\alpha, \beta \geq 0$ tal que

$$\|Sx\|^2 \leq \alpha^2 \|x\|^2 + \beta^2 \|Tx\|^2, \qquad x \in \mathcal{D}(T). \tag{$*$}$$

   Muestre que el ínfimo de todo los $\beta > 0$ que satisfacen $(*)$ para un $\alpha \geq 0$ es igual a la T-cota de S.

   Hint. Muestre que $2xy \leq c^2 x^2 + c^{-2} y^2$ for $c, x, y \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

4. Sea X un espacio de Banach y $T(X \to X)$ un operador lineal cerrado. Sea $S(X \to X)$ con $\mathcal{D}(S) \supseteq \mathcal{D}(T)$ y $z \in \varrho(T)$. Muestre que S es T-compacto si y solo si $S(T - z)^{-1}$ es compacto.