Universidad de los Andes, MATE-4241

Teoría de operadores

Taller 8

Fecha de entrega: 12 de octubre 2012

---

1. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $T(H \to H)$ un operadore autoadjunto. Sea $z \in \varrho(T)$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$. Muestre que $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(T)$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ tal que

$$x_n \not\to 0, \quad x_n \xrightarrow{w} 0 \quad \text{and} \quad \big((T-z)^{-1} - (\lambda - z)^{-1}\big)x_n \to 0 \qquad \text{for } n \to \infty.$$

2. Sea $\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$ y $\mathcal{D}(T) := C_c^\infty(\mathbb{R}^+) = \{f \in \mathbb{C}^\infty \ : \ \text{supp}(f) \text{ es compacto}\}$. Define

$$T : \mathcal{D}(T) \subseteq L_2(\mathbb{R}^+) \to L_2(\mathbb{R}^+), \quad Tx = \mathrm{i}x'.$$

Se puede mostrar que

$$\mathcal{D}(T^*) = \left\{ x \in L_2(\mathbb{R}^+) \ : \ \begin{array}{l} x|_I \text{ es abs. continua para cada intervalo compacto } I \subseteq \mathbb{R}^+ \\ \text{y} \ \ x' \in L_2(\mathbb{R}^2) \end{array} \right\}$$

y $T^*x = \mathrm{i}x'$ para $x \in \mathcal{D}(T^*)$.

Calcule los indices de defecto de T. Tiene extensiones autoadjuntos? Si es así, determine todas las extensiones autoadjuntas.

3. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $S(H \to H)$ un operador lineal densamente definido y clausurable. Muestre que $\Gamma(S) = \Gamma(\overline{S})$ y que $n(S, \lambda) = n(\overline{S}, \lambda)$ para todo $\lambda \in \Gamma(S)$. Concluya que $n(S, \cdot)$ es constante en componentes conexas de $\Gamma(S)$.

4. Sea H un espacio de Hilbert complejo, $S(H \to H)$ un operador simétrico con indices de defecto $n_+(S) = n_-(S) = m < \infty$.

   (i) Sean T_1, T_2 extensiones autoadjuntas de S y $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\text{rg}(T_1 - \lambda)$ no es cerrado. Muestre que $\text{rg}(T_2 - \lambda)$ tampoco lo es. Concluya que $\sigma_c(T_1) \subseteq \sigma(T_2)$ y $\sigma_c(T_2) \subseteq \sigma(T_1)$.

   (ii) Sea $\lambda \in \Gamma(S) \cap \mathbb{R}$. Muestre que existe una extensión autoadjunta T de S tal que λ es un autovalor de T de dimensión finita.

   Hint. $\dim(\ker(S^* - \lambda)) = ?$