Universidad de los Andes, MATE-4241

Teoría de operadores

Taller 7

Integral de Bochner; spectral sets.

Fecha de entrega: 5 de octubre 2012

---

1. Use fórmla de Stone para encontrar la resolución espectral de al menos uno de los operadores siguientes:

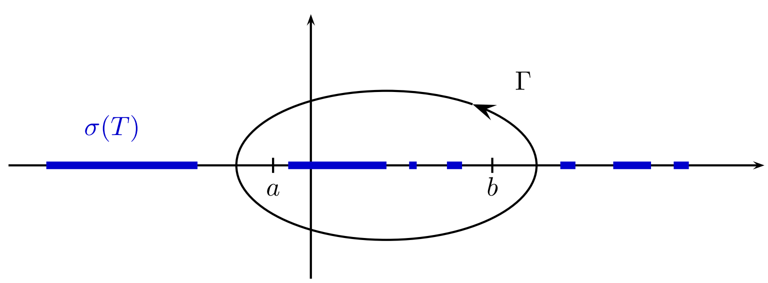
   (a) $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ on $\mathbb{C}^2$.

   (b) Sea (X, μ) un espacio de medida y $g : X \to \mathbb{R}$ una función μ-medible. Define el operador maximal de multiplicación T_g en $L_2(X)$ por

   $$\mathcal{D}(T_g) := \{f \in L_2(X) : fg \in L_2(X)\}, \qquad T_g f := gf \quad \text{for } x \in \mathcal{D}(T_g).$$

2. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $T(H \to H)$ un operador lineal autoadjunto. Sea $a, b \in \varrho(T) \cap \mathbb{R}$ y Γ una curva de Jordan simple rectificable y positivamente orientada tal que encierra a $(a, b) \cap \sigma(T)$ y que el resto del espectro está fuera de Γ. Muestre

$$E(b) - E(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma (\lambda - T)^{-1} \, \mathrm{d}\lambda.$$



3. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$ un operador acotado. Sea Γ una curva de Jordan simple rectificable y positivamente orientada tal que encierra $\sigma(T)$. Muestre:

$$T^n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma \lambda^n (\lambda - T)^{-1} \, \mathrm{d}\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{N}_0.$$

4. Sea X un espacio de Banach y $T(X \to X)$ un operador lineal cerrado. Un *conjunto espectral* (*spectral set*) es un subconjunto Σ de $\sigma(T)$ tal que Σ y $\sigma(T) \setminus \Sigma$ con cerrados en el plano complejo extendido. Sea Σ un conjunto espectral de T acotado y Γ una curva de Jordan rectificable en $\varrho(T)$ tal que encierre Σ y $\sigma(T) \setminus \Sigma$ queda fuera de Γ. Muestre que $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma (\lambda - T)^{-1} \, \mathrm{d}\lambda$ es una proyección que conmuta con T.