Universidad de los Andes, MATE-4241

Teoría de operadores

Taller 5

Transformada de Cayely; teorema espectral.

Fecha de entrega: 14 de septiembre 2012

---

1. Sea H un espacio de Hilbert complejo, A un operador autoadjunto tal que A^{-1} existe y es densamente definido. Sea U la transformada de Cayley de A. Muestre:
   (a) A^{-1} es simétrico.
   (b) La transformada de Cayley de A^{-1} es $-U^{-1}$.
   (c) A^{-1} es autoadjunto.

2. Sea $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal en un espacio de Hilbert complejo H y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Define el operador $A(H \to H)$ por

$$\mathcal{D} := \{x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \langle x\,, \mathrm{e}_n\rangle|^2 < \infty\}, \qquad Ax := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x\,, \mathrm{e}_n\rangle \mathrm{e}_n \quad \text{for } x \in \mathcal{D}.$$

   (a) Muestre que A es bien definido, cerrado y simétrico.
   (b) Encuentre la transformada de Cayley de A.

3. Sea H un espacio de Hilbert complejo, $A \in L(H)$ un operador autoadjunto y $f \in C(\sigma(A))$. Muestre que $f(\sigma(A)) = \sigma(f(A))$. Muestre que $f(A)x = f(\lambda)x$ si $Ax = \lambda x$.

4. Sea $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ una resolución de la identidad y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Define $A(H \to H)$ por

$$Ax := \int_{\infty}^{\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x \quad \text{para} \quad x \in \mathcal{D}(A) := \{x \in H : \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\langle E_\lambda x\,, x\rangle < \infty\}.$$

   (a) $\operatorname{rg}(E_\lambda - E_\mu) \subseteq \mathcal{D}(A)$ para todo $\mu < \lambda \in \mathbb{R}$.
   (b) $\mathcal{D}(A)$ es un subespacio denso de H y A es bien definido.
   (c) A es autoadjunto.
   (d) $E_\lambda A \subseteq AE_\lambda$.