# Teoría de operadores

Taller 3

Integral de Riemann-Stieltjes; resolución de la identidad. Fecha de entrega: 31 de agosto

---

1. Sea $\alpha \in \mathrm{BV}[a,b]$, $f \in I[a,b]$ y defina $K : [a,b] \to \mathbb{K}$ por $K(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\alpha(t)$ para $x \in (a,b]$ y $K(a) := 0$. Muestre:
   (a) $K \in \mathrm{BV}[a,b]$.
   (b) Si $\alpha$ es continua por la derecha en $s \in [a,b)$, entonces $K$ también lo es.
   (c) $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}K(t) = \int_a^b (fg)(t)\,\mathrm{d}\alpha(t)$ para todo $g \in I[a,b]$.

2. Sea $H$ un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$ un operador compacto autoadjunto con autovalores distintos $\mu_j$. Sea $P_j$ la proyección ortogonal sobre el espacio propio de $T$ respecto a $\lambda_j$. Muestre que $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ es una resoluión de la identidad donde

$$E_\lambda x := \begin{cases} \sum_{\lambda_j \le \lambda} P_j x, & \lambda < 0, \\ x - \sum_{\lambda_j > \lambda} P_j x, & \lambda \ge 0, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ x \in H.$$

3. Sea $H$ un espacio de Hilbert, $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ una resoluión de la identidad en $H$ y $\varphi : \mathbb{R} \to (a,b)$ una biyección continua no decreciente. Suponga que $E_a = 0$ y $E_{b-0} = E_b = I$. Muestre que $(F(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ es una resoluión de la identidad en $H$ donde

$$F_\lambda := E_{\varphi(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. Sea $H$ un espacio de Hilbert, $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ una resoluión de la identidad en $H$ y $f, g \in I[a,b]$. Muestre:
   (a) $\displaystyle\Big\langle \Big( \int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda \Big) x\,, y \Big\rangle = \int_a^b f(\lambda)\,\langle E_\lambda x\,, y\rangle, \qquad x, y \in H;$
   (b) $\displaystyle\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda = 0$ para $f \equiv 0$, $\qquad \displaystyle\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda = \int_a^b \mathrm{d}E_\lambda = E_b - E_a$ para $f \equiv 1$;
   (c) $\displaystyle E_\mu \int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda = \int_a^\mu f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda, \quad a \le \mu \le b;$
   (d) $\displaystyle\Big( \int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda \Big)\Big( \int_a^b g(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda \Big) = \int_a^b f(\lambda) g(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda;$
   (e) $\displaystyle\Big( \int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda \Big)^* = \int_a^b \overline{f(\lambda)}\,\mathrm{d}E_\lambda;$
   (f) $\displaystyle\Big\| \int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x \Big\|^2 = \int_a^b |f(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\|E_\lambda x\|^2, \quad x \in H.$