Universidad de los Andes, MATE-4241

Teoría de operadores

Taller 2

Operadores adjuntos.

Fecha de entrega: 24 de agosto 2012

---

1. (a) Muestre que el espectro de un operador acotado en un espacio de Banach nunca es vacío.
   (b) También se tiene para operadores no acotados? (Prueba o contraejemplo!)

2. Sean H_1, H_2 y H_3 espacios de Hilbert y $S(H_1 \to H_2)$ y $T(H_2 \to H_3)$ operadores lineales densamente definidos.
   (a) Si $T \in L(H_2, H_3)$ entonces TS es densamente definido y $(TS)^* = S^*T^*$.
   (b) Si S es inyectivo y $S^{-1} \in L(H_2, H_1)$ entonces TS es densamente definido y $(TS)^* = S^*T^*$.
   (c) Si S es inyectivo y $S^{-1} \in L(H_2, H_1)$ entonces S^* es inyectivo y $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$

Sea X un espacio de Banach, $A \subseteq X$, $B \subseteq X'$. Se definen los conjuntos

$$A^\circ := \{\varphi \in X' \,:\, \varphi(a) = 0 \ \text{ for all } a \in A\} =: \ \text{annihilator of } A,$$
$$^\circ B := \{x \in X \,:\, b(x) = 0 \ \text{ for all } b \in B\} =: \ \text{annihilator of } B.$$

3. Sea X un espacio de Banach, $A \subseteq X$, $B \subseteq X'$.
   (a) Muestre que A° y $^\circ B$ son subespacios cerrados y que
   $$A^\circ = \left(\overline{\operatorname{span} A}\right)^\circ \qquad \text{y} \qquad {}^\circ B = {}^\circ\left(\overline{\operatorname{span} B}\right).$$
   (b) Muestre ${}^\circ\left(A^\circ\right) = \overline{\operatorname{span} A}$ y $\left({}^\circ B\right)^\circ \supseteq \overline{\operatorname{span} B}$

4. (a) Sean X, Y espacios de Banach, $Y \neq \{0\}$ y $T(X \to Y)$ un operador lineal cerrado con dominio denso. Muestre que $\mathcal{D}(T') \neq \{0\}$.
   Hint. Muestre que para todo $y \in \mathcal{D}(T')$, $y \neq 0$, existe un $\varphi \in \mathcal{D}(T')$ tal que $\varphi(y) \neq 0$.
   (b) Muestre por lo menos dos puntos de lo siguiente:
   (i) $\left(\operatorname{rg} T\right)^\circ = \left(\overline{\operatorname{rg} T}\right)^\circ = \ker T'$,

(ii) $\overline{\operatorname{rg} T} = {}^{\circ}\big(\ker T'\big)$,

(iii) $\overline{\operatorname{rg} T} = Y \iff T'$ es inyectivo,

(iv) ${}^{\circ}\overline{\operatorname{rg} T'} \cap \mathcal{D}(T) = \ker T$,

(v) $\overline{\operatorname{rg} T'} \subseteq \big(\ker T\big)^{\circ}$.