

Teoría de Medida e Integración

Taller 11

Fubini. Teorema de transformación

Fecha de entrega: 30 de octubre de 2026

1. Sean $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ y $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ espacios de medida (no necesariamente σ -finitos) y sea ϱ una medida sobre $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ tal que $\varrho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ si $A \in \mathfrak{A}$ y $B \in \mathfrak{B}$. Muestre que para $f \in \mathcal{L}_1(X)$ y $g \in \mathcal{L}_1(Y)$ la función

$$h : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x, y) = f(x)g(y)$$

pertenece a $\mathcal{L}_1(X \times Y)$ y que

$$\int_{X \times Y} h \, d\varrho = \left(\int_X f \, d\mu \right) \cdot \left(\int_Y g \, d\nu \right).$$

En los ejercicios que siguen, consideramos $\mathbb{R}^n$ con la medida de Borel β^n y para una función integrable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ escribimos $\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, d\beta^n$.

Sin prueba puede utilizar el siguiente hecho: Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe una función $h \in C_c(\mathbb{R}^n)$ (función continua con soporte compacto) tal que $\|f - h\|_1 < \varepsilon$.

2. Sean $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ y defina $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(x, y) := f(x - y)g(y)$.

- (a) Demuestre que φ es Borel-medible, que es integrable y que $\|\varphi\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.
- (b) Sea $A := \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x, \cdot) \text{ no es integrable respecto a } y\}$. Muestre que $\beta^n(A) = 0$.
- (c) Sea

$$f * g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad (f * g)(x) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) \, d\beta^n(y), & x \in \mathbb{R}^n \setminus A, \\ 0 & x \in A. \end{cases}$$

Demuestre que $f * g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ y que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

3. (a) Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ y sea $\varepsilon > 0$. Demuestre que existe $\delta > 0$ tal que $\|f - f(\cdot - a)\|_1 < \varepsilon$ for all $a \in \mathbb{R}^n$ with $\|a\| < \delta$.
- (b) Sea $(g_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ con $\|g_j\|_1 = 1$ y $g_j \geq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Suponga que $\lim_{j \rightarrow \infty} d_j = 0$ donde $d_j := \sup\{\|x\| : x \in \text{supp } g_j\}$. Muestre para todo $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f * g_j - f\|_1 = 0.$$

4. Sean $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ y suponga que f es acotada. Demuestre que $f * g$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicios voluntarios

5. Sea $g : X \rightarrow Y$ una función medible donde $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ es un espacio de medida y $(Y, \mathfrak{B})$ es un espacio medible. En $(Y, \mathfrak{B})$ definimos la medida ν por

$$\nu(B) := \mu(g^{-1}(B)).$$

- (a) Demuestre que una función $h : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es medible si y solo si $h \circ g : X \rightarrow \mathbb{R}$ es medible.
(b) Demuestre que una función $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable si y solo si $f \circ g : X \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable y demuestre que en este caso

$$\int_Y f \, d\nu = \int_X f \circ g \, d\mu.$$

Hint. Demuestre la afirmación primero para funciones simples nonnegativas.

El cambio de variables debería ser $\int_{[0,1]} f \circ g \, d\mu = \int_{[0,1/3]} f \, d\nu_g$, y similarmente. Por otra parte, se debería tener que $\nu_h = \frac{3}{2}\mu$. Adjunto la tarea de medida en la que me salió este problema, que según Sasha la solución es correcta (está en las páginas 11 y 12 del documento).

6. Sea $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función del Ejercicio 1 en el Taller 5 y sea μ la medida inducida por G (es decir que $\mu([a, b]) = G(b) - G(a)$ para intervalos $[a, b] \subseteq [0, 1]$). Encuentre $\int_{[0,1]} x \, d\mu$ y $\int_{[0,1]} x^2 \, d\mu$.