

Teoría de Medida e Integración

Taller 10

Coordenadas polares y volumen de la bola en $\mathbb{R}^n$.

Fecha de entrega: 23 de octubre de 2026

1. Las coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, son definidas recursivamente por $\Phi_n : D_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde para $n \geq 2$

$$D_2 := [0, \infty) \times [-\pi, \pi], \quad D_{n+1} := [0, \infty) \times [-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^{n-1},$$

y

$$\Phi_2(r, \vartheta_1) = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta_1 \\ r \sin \vartheta_1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{n+1}(r, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n) := \begin{pmatrix} \cos(\vartheta_n) \cdot \Phi_n(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}) \\ r \sin \vartheta_n \end{pmatrix}.$$

Muestre para todo $n \geq 2$, $(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}) \in D_n$ y $\alpha \geq 0$:

- (a) $\|\Phi_n(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1})\|_2 = r$, $\Phi_n(\alpha r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}) = \alpha \Phi_n(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1})$.
- (b) $\Phi_n : D_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es sobreyectiva.
- (c) $\det D\Phi_n(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}) = r^{n-1} \cos \vartheta_2 \cdots (\cos \vartheta_{n-1})^{n-2}$.
- (d) Defina $D'_n := (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2}$ y muestre que

$$\Phi_n : D'_n \rightarrow \Phi_n(D'_n)$$

es un C^∞ -difeomorfismo y que existe un conjunto N_n con medida de Lebesgue 0 tal que $\Phi_{n+1}(D'_n) = \mathbb{R}^n \setminus N_n$.

2. Sea $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ la norma euclidiana de un vector $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Muestre

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx = \pi^{n/2}. \quad (*)$$

3. Sea $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$. Demuestre

- (a) Para $x > 0$ fijo, la función $f_x : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_x(t) := e^{-t} t^{x-1}$ es Lebesgue-integrable.
- (b) Γ es de clase C^∞ y para $x \in (0, \infty)$ y $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty e^{-t} (\ln(t))^k t^{x-1} dt.$$

- (c) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ($x > 0$).
- (d) $\Gamma(n+1) = n!$ ($n \in \mathbb{N}$).

4. Sea κ_n el volumen de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$. Muestre para $n \in \mathbb{N}$:

$$\kappa_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = \begin{cases} \frac{2^{k+1} \pi^k}{1 \cdot 3 \cdots (2k+1)}, & \text{si } n = 2k + 1 \text{ con } k \in \mathbb{N}_0, \\ \frac{\pi^k}{k!}, & \text{si } n = 2k \text{ con } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Hint. Calcule la integral $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|z\|^2} dz$ utilizando coordenadas polares y compare con (*).