

Teoría de Medida e Integración

Taller 9

Teorema de Fubini-Tonelli; Principio de Cavalieri.

Fecha de entrega: 16 de octubre de 2026

Puede usar el Teorema de Fubini: Sean $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ y $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ espacios de medida σ -finitos.

- (i) Si $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ es $\mu \times \nu$ -integrable, entonces sus integrales iteradas existen y

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

- (ii) Si $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ es $\mu \times \nu$ -medible, entonces f es $\mu \times \nu$ -integrable si por lo menos una de las integrales

$$\int_{X \times Y} |f| \, d(\mu \times \nu), \quad \int_Y \left(\int_X |f(x, y)| \, d\mu(x) \right) d\nu(y), \quad \int_X \left(\int_Y |f(x, y)| \, d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

es finita. En este caso, las tres integrales son iguales.

1. Determine si las siguientes integrales existen y determine sus valores si posible:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) \, dx \right) dy, \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx, \quad \int_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) \, d\lambda^2$$

para las funciones

(a) $f(x, y) = \frac{x - y}{(x + y)^3}, \quad x, y > 0,$

(b) $f(x, y) = \begin{cases} 2^{2n} & \text{si } 2^{-n} < x \leq 2^{-n+1}, \, 2^{-n} < y \leq 2^{-n+1}, \\ -2^{2n+1} & \text{si } 2^{-n-1} < x \leq 2^{-n}, \, 2^{-n} < y \leq 2^{-n+1}, \\ 0 & \text{en otros casos,} \end{cases}$

donde λ^2 es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$ y las integrales iteradas son integrales en el sentido de Lebesgue.

2. Muestre que el plano $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ tiene medida de Lebesgue 0.

3. (a) *Principio de Cavalieri.* Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y $K_{x_n} := \{(x_j)_{j=1}^{n-1} : (x_j)_{j=1}^n \in K\}$ para todo $x_n \in \mathbb{R}$. Muestre que

$$\beta^n(K) = \int_{\mathbb{R}} \beta^{n-1}(K_x) \, d\lambda(x),$$

donde β^k es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^k$.

- (b) Sea $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ compacto y $h > 0$. El cono con base B y altura h es definido por

$$C(B, h) := \{((1 - \lambda)x, \lambda h) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : x \in B, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Calcule el volumen $\beta^n(C(B, h))$ del cono $C(B, h)$.

4. Sea B el interior del elipse $4x^2 + y^2 = 4$. Calcule $\int_B y^2 \, d\lambda(x, y)$.