

Teoría de Medida e Integración

Taller 8

Teorema Lebesgue. Convergencia.

Fecha de entrega: 09 de octubre de 2026

En los problemas 1, 2 y 3 suponemos que todas las funciones f y f_n son medibles.

Definición. Se dice que las funciones f_n convergen a f en medida si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$.

Definición. Para $1 \leq p < \infty$, definimos $\mathcal{L}_p(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ medible} : \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$ y $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu < \infty\right)^{1/p}$ para $f \in \mathcal{L}_p(X)$. Además, $\mathcal{L}_\infty(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ medible} : \text{esssup } |f| < \infty\}$ donde $\text{esssup } f := \inf\{M \in \mathbb{R} : f \leq M \mu\text{-c.s.}\}$. Para $f \in \mathcal{L}_\infty(X)$ definimos $\|f\|_\infty := \text{esssup } |f|$.

Hechos:

- (i) Si $f_n \rightarrow f$ y $f_n \rightarrow g$ en medida, entonces $f = g$ μ -c.s.
 - (ii) Si $f_n \rightarrow f$ μ -c.s., entonces $f_n \rightarrow f$ en medida.
 - (iii) $\|\cdot\|_p$ es un seminorma en $\mathcal{L}_p(X)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.
-

1. (a) Si f_n converge casi uniformemente, entonces existe una función medible f , tal que $f_n \rightarrow f$ μ -casi siempre.
(b) Supongamos que $f_n \rightarrow f$ en medida y que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy para convergencia casi uniforme. Muestre que $f_n \rightarrow f$ casi uniformemente.
2. (a) Suponga que $f_n \rightarrow f$ en medida. Muestre que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge μ -casi siempre a f .
(b) Muestre que el teorema de Lebesgue sigue siendo válido si suponemos $f_n \rightarrow f$ en medida en vez de $f_n \rightarrow f$ μ -casi siempre.
3. Suponga que $\mu(X) < \infty$. Muestre que $f_n \rightarrow f$ en medida si y sólo si cada subsucesión de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión que converge μ -casi siempre a f . Muestre que en general no es equivalente si $\mu(X) = \infty$.
4. Para las siguientes sucesiones de funciones determine si convergen puntualmente, si convergen μ -casi siempre, si convergen en medida, si convergen casi uniforme, si convergen en $\mathcal{L}_p$. Si

convergen, halle la función límite.

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n = \chi_{[n, \infty)},$$

$$g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_n = \chi_{[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]}, \quad \text{con } n = 2^k + j \quad (j = 0, \dots, 2^k - 1),$$

$$h_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ 2n - n^2 x, & 1/n < x \leq 2/n, \\ 0, & 2/n < x \leq 1. \end{cases}$$

Ejercicios voluntarios

5. *Lema de Riemann-Lebesgue.* Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ y $\tilde{f}$ su transformada de Fourier. Muestre que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{f}(t) = 0$.

Hint. Muestre la afirmación primero para funciones simples.

6. Para $a > 0$ y $t > 0$ muestre para las integrales impropias de Riemann:

$$\int_0^\infty \frac{t}{t^2 + x^2} \cos(ax) \, dx = \frac{\pi}{2} e^{-at}, \quad \int_0^\infty \frac{x}{t^2 + x^2} \sin(ax) \, dx = \frac{\pi}{2} e^{-at}.$$

¿Existen las integrales como integrales de Lebesgue?

Hint. Para la primera integral, muestre que la función

$$f_a(t) := \int_0^\infty \frac{t}{t^2 + x^2} \cos(ax) \, dx$$

satisface la ecuación diferencial $f_a'' = a^2 f_a$ derivando bajo la integral y utilizando integración por partes.

7. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Riemann-integrable (es decir, su restricción a cualquier compacto es Riemann-integrable). Demuestre que f es Lebesgue-integrable si y sólo si la integral impropia de Riemann de $|f|$ sobre I existe y que en este caso la integral de Riemann de f coincide con la integral de Lebesgue de f .

Caso especial: Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Riemann-integrable. Entonces f es Lebesgue-integrable si y sólo si la integral impropia de Riemann

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x)| \, dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x)| \, dx$$

existe y en este caso, $R\text{-}\int_{-\infty}^\infty f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$, donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

8. Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$. Demuestre que f es Lebesgue integrable y calcule su integral (sin usar la integral de Riemann).