

Teoría de Medida e Integración

Taller 7

Teoremas de Fatou, Levi y Lebesgue.

Fecha de entrega: 25 de septiembre de 2026

1. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_1(X)$ y $f \in \mathcal{L}_1(X)$ tal que $f_n \rightarrow f$ μ -c.s. y $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| d\mu = \int_X |f| d\mu$. Muestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$.
2. Una función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *absolutamente continua*, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y toda partición $a \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \dots \leq \alpha_n < \beta_n \leq b$ se tiene que

$$\sum_{j=1}^n (\beta_j - \alpha_j) < \delta \quad \implies \quad \sum_{j=1}^n |g(\beta_j) - g(\alpha_j)| < \varepsilon.$$

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrable. Muestre que la siguiente función es absolutamente continua:

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(t) dt := \int_{[a, x]} f d\mu.$$

3. Muestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{n}}}{(1 + \frac{x}{n})^n} dx = 1$.
4. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida, $\alpha \in (0, \infty)$ y $f : X \rightarrow [0, \infty]$ una función medible con $\int_X f d\mu := c \in (0, \infty)$. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X n \log(1 + (f/n)^\alpha) d\mu.$$

Hint. Si $\alpha \geq 1$, entonces el integrando es $\leq \alpha f$; aplique el lema de Fatou, si $\alpha \in (0, 1)$.

Ejercicio voluntario

5. Sea $M \subset \mathbb{R}$ un conjunto de Lebesgue con $\lambda(M) < \infty$. Muestre que para cada $\varepsilon > 0$ existe una *step function*¹ φ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_M - \varphi| d\lambda < \varepsilon.$$

¹Una *step function* es una función de la forma $\varphi = \sum_{j=1}^n \beta_j \chi_{V_j}$ con $n \in \mathbb{N}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$ y los V_j son intervalos abiertos o singletons para $j = 1, \dots, n$.