

Teoría de Medida e Integración

Taller 4

Un conjunto no Lebesgue-medible.

Fecha de entrega: 04 de septiembre de 2026

Sea $I = \{[a, b) : a \leq b\} \subseteq \mathbb{P}\mathbb{R}$ y sea $\lambda_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda_0([a, b)) = b - a$. Ya sabemos que λ_0 es un contenido σ -aditivo en I . Sea λ_0^* la medida exterior generada por λ_0 y sean

- $\mathfrak{B} = \sigma(I)$ es la sigma álgebra generada por I ,
- $\mathfrak{M} = \{M \subseteq \mathbb{R} : M \text{ es } \lambda^*\text{-medible}\}$.

Entonces $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$ y λ_0 tiene una extensión única a una medida λ en $\mathfrak{M}$ (¿por qué?). Esta medida λ se llama la *medida de Lebesgue*.

1. Sean $\mathfrak{A}_0$ un álgebra sobre un conjunto X y $\mathfrak{A}$ la σ -álgebra generada por $\mathfrak{A}_0$. Sea μ una medida finita sobre $\mathfrak{A}$. Demuestre que para todo $A \in \mathfrak{A}$ existe una sucesión $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}_0$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \Delta C_n) = 0.$$

2. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida donde μ es σ -finita. Sea μ^* la medida exterior generada por μ . Muestre que para todo $Y \subseteq X$ existe un conjunto $A \in \mathfrak{A}$ tal que

$$Y \subseteq A, \quad \mu^*(Y) = \mu(A), \quad \mu^*(B) = 0 \text{ para todo } B \in \mathfrak{A} \text{ con } B \subseteq A \setminus Y.$$

3. Sea λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y $\mathfrak{M}$ como arriba. Muestre: Si $M \in \mathfrak{M}$ y $\lambda(M) > 0$, existe un $N \in \mathfrak{M}$ tal que $N \subseteq M$ y

$$\lambda(N) > 0 \quad \text{y} \quad \lambda(M \setminus N) > 0.$$

(Se dice que la *medida de Lebesgue no tiene átomos*.)

4. (a) No existe ninguna medida μ sobre el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathbb{P}\mathbb{R})$ tal que μ es invariante bajo traslación y $0 < \mu([0, 1)) < \infty$.
(b) Existe un conjunto $M \subseteq \mathbb{R}$ que no es Lebesgue-medible.
(c) Demuestre que cada conjunto Lebesgue-medible A con $\lambda(A) > 0$ contiene un subconjunto no Lebesgue-medible.

Hint para (a):

- Define una relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}$ por $x \sim y : \iff x - y \in \mathbb{Q}$.
- De cada clase escoja un representante en $[0, 1)$. Sea M la unión de ellos.
- Si μ es una medida como en (a), qué es $\mu(M)$ =?