

Teoría de Medida e Integración

Taller 3

Extensión de una medida; conjunto de Cantor.

Fecha de entrega: 25 de agosto de 2026

1. Sea X un conjunto no contable y defina

$$\mathfrak{M} := \{E \subset X : E \text{ contable o } X \setminus E \text{ contable}\},$$

$$\mu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mu(E) := \begin{cases} 0, & E \text{ contable,} \\ 1, & X \setminus E \text{ contable.} \end{cases}$$

- (a) Muestre que $\mathfrak{M}$ es una σ -álgebra y μ es una medida sobre $\mathfrak{M}$.
- (b) Determine la medida exterior μ^* .

2. Para $\mu : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ contenido sobre un semianillo H , denotamos con μ^* la medida exterior generada por μ , y con $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ la σ -álgebra de los conjuntos μ^* -medibles.

Sean $\mu, \nu : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ contenidos sobre un semianillo H . Muestre:

- (a) $(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*$.
- (b) $\mathfrak{A}_{(\mu+\nu)^*} \supseteq \mathfrak{A}_{\mu^*} \cap \mathfrak{A}_{\nu^*}$.
- (c) ¿Siempre es cierto que $\mathfrak{A}_{(\mu+\nu)^*} = \mathfrak{A}_{\mu^*} \cap \mathfrak{A}_{\nu^*}$?

3. Sea H un semianillo sobre X , $\sigma(H)$ la σ -álgebra generada por H y sean $\mu, \nu : \sigma(H) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ medidas con

- (i) $\mu(A) \leq \nu(A)$ para todo $A \in H$.
- (ii) $\nu|_H$ es σ -finita.

Muestre que $\mu(B) \leq \nu(B)$ para todo $B \in \sigma(H)$.

4. Un conjunto de Borel, no contable, con medida de Lebesgue 0.

$$T := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} : x_n \in \{0, 2\} \right\} =: \text{conjunto de Cantor}.$$

- (a) Muestre que T es cerrado, en particular es un conjunto de Borel.
- (b) Muestre que $\lambda(T) = 0$, donde λ es la medida de Lebesgue.
- (c) Muestre que T no es contable.