

Teoría de Medida e Integración

Taller 2

Contenidos, premedidas y medidas.

Fecha de entrega: 21 de agosto de 2026

Definición. Sea X un conjunto y $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{P}X$. El *límite superior* y el *límite inferior* de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se definen por

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Se dice que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge* si $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Definición. Una función $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *función de salto* (*jump function*) si es de la forma

$$G(x) = \begin{cases} \alpha + \sum_{y \in A \cap [0, x)} p(y), & x > 0, \\ \alpha - \sum_{y \in A \cap [x, 0)} p(y), & x \leq 0, \end{cases}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ contable y $p : A \rightarrow (0, \infty)$ con $\sum_{y \in A \cap [-n, n]} p(y) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1. Para $a < b \in \mathbb{R}$ define $[a, b)_{\mathbb{Q}} := [a, b) \cap \mathbb{Q}$.

Sea $I = \{[a, b)_{\mathbb{Q}} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b\} \cup \{\emptyset\}$, $\mu([a, b)_{\mathbb{Q}}) = b - a$ para $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$, y $\mu(\emptyset) = 0$. Muestre:

- (i) I es un semianillo sobre $\mathbb{Q}$.
- (ii) μ es un contenido sobre I .
- (iii) μ no es una premedida sobre I .

2. Sea R un anillo sobre un X y $\mu : R \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ un contenido. Suponga que cada sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq R$ con $\mu(A_1) < \infty$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n =: A \in R$ cumple $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

¿Se sigue que μ es una premedida sobre R ? (Prueba o contraejemplo!)

3. Sea μ una premedida sobre un σ -anillo R y sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq R$. Muestre:

- (a) $\mu\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.
- (b) Si existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k) < \infty$, entonces $\mu\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.
- (c) Si existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k) < \infty$ y si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, entonces $\mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

4. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente. Muestre:

- (a) Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe el límite $\lim_{y \rightarrow x^-} F(y)$.
- (b) Sea $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \lim_{y \rightarrow x^-} F(y)$. Muestre que Φ es creciente y que es continua por la izquierda.
- (c) Suponga que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente y continua por la izquierda. Muestre que existen funciones crecientes $G, H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que G es continua, H es una función de salto, $F = G + H$ y $\mu_F = \mu_G + \mu_H$.

5. **Voluntario.** En la clase probamos: Si R es un anillo con un contenido $\mu : R \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, y si $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq R$ es una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos con $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in R$, entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right).$$

Demuestre que desigualdad puede ser estricta.

Hint. Ejercicio 3 del Taller 1.