

Teoría de Medida e Integración

Taller 1

Anillos, álgebras.

Fecha de entrega: 14 de agosto de 2026

1. Sea $\{Q_{z,k} : k \in \mathbb{N}_0, z \in \mathbb{Z}^n\}$ el conjunto de los cubos elementales

$$Q_{z,k} := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : z_j/2^k \leq x_j \leq (z_j + 1)/2^k, j = 1, \dots, n\}.$$

Demuestre que cada conjunto abierto $\mathbb{R}^n$ es unión enumerable de cubos $Q_{z,k}$.

2. (a) Muestre que una σ -álgebra o es finita o no contable.
(b) Un σ -anillo con infinitos elementos contiene una sucesión de subconjuntos disjuntos no vacíos.

3. Sea X un conjunto contable infinito y defina

$$\mathfrak{A} := \{A \subseteq X : A \text{ ó } X \setminus A \text{ es finito}\},$$

$$\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad \mu(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ finito,} \\ 1, & A \text{ infinito.} \end{cases}$$

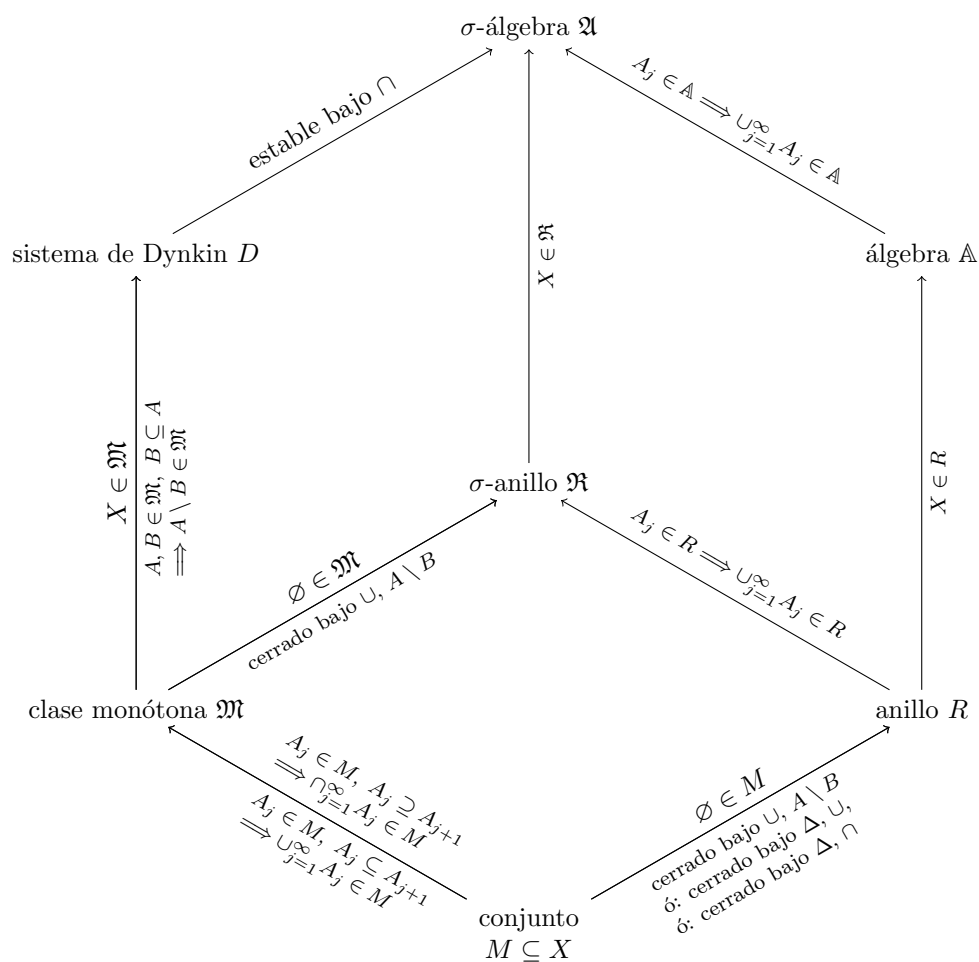
- (a) Demuestre que $\mathfrak{A}$ es un álgebra sobre X .
(b) Demuestre que μ es un contenido, pero que no es una premedida.
4. Sea X, Y conjuntos, $f : X \rightarrow Y$, $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{P}Y$ y $\sigma(\mathcal{E})$ la σ -álgebra generada por $\mathcal{E}$. Demuestre que

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$$

donde $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$ es la σ -álgebra generada por $f^{-1}(\mathcal{E}) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}\}$.

Ejercicios voluntarios

5. ¿La intersección de semianillos es un semianillo?
6. Sean X, Y conjuntos, $f : X \rightarrow Y$ una función y H un semianillo sobre Y .
¿Es $\{f^{-1}(A) : A \in H\} \subseteq \mathbb{P}X$ un semianillo sobre X ?
7. Sea X un conjunto no vacío. Un conjunto $R \subseteq \mathbb{P}(X)$ se llama *ideal* si es un anillo y si $A \cap B$ está en R para todo A en R y todo B en $\mathbb{P}(X)$. Un ideal R es *maximal* si para todo ideal $R \subseteq R' \subseteq \mathbb{P}(X)$ se tiene $R' = R$ o $R' = \mathbb{P}(X)$.
Fije un elemento x en X , y sea R la familia de subconjuntos de X que no contienen a x .
(a) Muestre que R es un ideal maximal de $\mathbb{P}(X)$.
(b) ¿Es $\mathbb{P}(X)/R$ un cuerpo? ¿A cuál cuerpo es isomorfo?



Gráfica adaptada de Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie, p. 25, y de <https://de.wikipedia.org/wiki/Maßtheorie>.