Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración

Último taller

Espacios L_p.

Fecha de entrega: 23 de mayo de 2024

---

1. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Una función $f : I \to \mathbb{C}$ se llama absolutamente continua si es absolutamente continua en todo subintervalo $[\alpha, \beta] \subseteq I$.

   (a) Sea $I = [a, b]$ y $f : I \to \mathbb{C}$ absolutamente continua. Demuestre que f es de variacón acotada. Muestre que la conclusión es falsa si $I = \mathbb{R}$.

   (b) Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y ser $f : I \to \mathbb{C}$ absolutamente continua. Demuestre que $V : [a, b] \to \mathbb{C}, V(x) := V_a^x f$ es absolutamente continua.

2. Sean $f,\ g : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Muestre:

   (a) Si $f = g$ en λ^s-casi todas partes, entonces $f = g$.

   (b) $\operatorname{esssup} |f| = \sup |f|$.

3. Sean $0 < p_1 < p_2 < \infty$.

   (a) Si $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ es un espacio de medida con $\mu(X) < \infty$, entonces $L_{p_2}(\mu) \subset L_{p_1}(\mu)$.

   (b) Si X es contable (finito o infinito) y μ la medida de conteo sobre X, entonces $L_{p_1}(\mu) \subset L_{p_2}(\mu)$. Si X es infinito contable, se cumple la inclusión estricta $L_{p_1}(\mu) \subsetneq L_{p_2}(\mu)$.

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^s)$ con $0 \le \varphi \le 1$ y

$$\text{(a)} \quad \varphi(x) = 0 \text{ para } |x| \ge 1, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_{\mathbb{R}^s} \varphi \, \mathrm{d}x = 1.$$

Para $\varepsilon > 0$ defina $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}, \quad \varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-s}\varphi(x/\varepsilon)$. Entonces $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^s)$, $0 \le \varphi \le \varepsilon^{-s}$ y

$$\text{(a')} \quad \varphi_\varepsilon(x) = 0 \text{ para } |x| \ge \varepsilon, \qquad\qquad \text{(b')} \quad \int_{\mathbb{R}^s} \varphi_\varepsilon(x) \, \mathrm{d}x = 1.$$

$(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ es una familia de *mollifiers*,

---

4. Sean $1 \le p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{R}^s)$ y φ y $\{\varphi_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ como arriba. Muestre:

   (a) $\varphi(y - \cdot\,) \cdot f(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^s)$ para todo $y \in \mathbb{R}^s$.

   (b) $\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$.

   (c) $\operatorname{supp}(\varphi * f) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(\varphi)$.

   (d) Si $f \in C_c(\mathbb{R}^s)$, entonces $\varphi_\varepsilon * f$ converge uniformemente a f si $\varepsilon \to 0$, es decir,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^s} \{|\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)|\} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

5. **Ejercicio voluntario.**

(a) $f \in L_1(\mathbb{R}^s)$, entonces $\varphi_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$.

(b) $f \in L_1(\mathbb{R}^s)$ con soporte compacto, entonces $\varphi_\varepsilon * f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^s)$.

(c) $f \in L_p(\mathbb{R}^s)$ con $1 \leq p < \infty$, entonces $\varphi_\varepsilon * f \in L_p(\mathbb{R}^s)$ y

$$\|\varphi_\varepsilon * f\|_p \leq \|f\|_p, \qquad \lim_{\varepsilon \searrow} \|\varphi_\varepsilon * f - f\|_p \to 0.$$