Universidad de los Andes
MATE-4220

# Teoría de Medida e Integración

Taller 14

Medidas signadas; teorema de Radon-Nikodym.

Fecha de entrega: 16 de mayo de 2024

---

1. Sean $\mu, \nu$ medidas complejas sobre una $\sigma$-álgebra $\mathfrak{A}$. Muestre que $\nu \ll \mu$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|\nu(A)| < \varepsilon$ si $A \in \mathfrak{A}$ con $|\mu|(A) < \delta$.

2. Sea $(X, \mathfrak{A})$ un espacio medible, sean $\mu$ y $\nu$ medidas con signo sobre $\mathfrak{A}$.
   (a) Demuestre que para todo a $A \in \mathfrak{A}$ lo siguiente es equivalente:
      (i) $A$ es $\mu$-nulo.
      (ii) $A$ es $\mu^+$-nulo y $\mu^-$-nulo.
      (iii) $A$ es $|\mu|$-nulo.
   (b) Demuestre que lo siguiente es equivalente:
      (i) $\mu \perp \nu$.
      (ii) $\mu^+ \perp \nu$ y $\mu^- \perp \nu$.
      (iii) $|\mu| \perp \nu$.
      (iv) $|\mu| \perp |\nu|$.

3. Sea $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ una medida compleja.
   (a) Muestre que existe una función $g : X \to \mathbb{C}$ tal que $|g| = 1$ y $\mu = g \odot |\mu|$.
   (b) Para $f \in \mathscr{L}_1(X, \mu)$ muestre que $f \in \mathscr{L}_1(X, |\mu|)$ y que

$$\left| \int_X f \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}|\mu|,$$

   donde

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \int_X f \,\mathrm{d}\operatorname{Re}(\mu)^+ - \int_X f \,\mathrm{d}\operatorname{Re}(\mu)^- + \mathrm{i} \int_X f \,\mathrm{d}\operatorname{Im}(\mu)^+ + \mathrm{i} \int_X f \,\mathrm{d}\operatorname{Im}(\mu)^-.$$

4. Sea $\mathfrak{B}$ la $\sigma$-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$ y $\beta$ la medida de Borel-Lebesgue sobre $\mathfrak{B}$. Sea $\mu$ una medida de Borel sobre $\mathbb{R}$ tal que la función de distribución

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} -\mu((x, 0]), & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \mu((0, x]), & x > 0 \end{cases}$$

   es derivable y $\varphi'$ es continua. Muestre que $\varphi'(x) = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\beta}(x) =$ la derivada de Radon-Nikodym.

## Ejercicios voluntarios

5. Sean $\mu, \nu, \omega$ medidas $\sigma$-finitas sobre la $\sigma$-álgebra $\mathfrak{A}$ con $\mu \ll \nu \ll \omega$. Muestre que $\mu \ll \omega$ y que

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\omega} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}.$$

6. Sea $(X, \mathfrak{A})$ un espacio medible y sean $\mu$ y $\nu$ medidas con signo y sea $\nu = \varrho + \sigma$ la descomposición de $\nu$ de Lebesgue con respecto a $\mu$.

   Demuestre que $|\nu| = |\varrho| + |\sigma|$ es la descomposición de $|\nu|$.

7. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad y sea $\mathcal{E}$ una $\sigma$-álgebra en $X$ tal que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$.

   (a) Muestre que para todo subconjunto $A$ de $X$ en $\mathcal{A}$ (pero no necesariamente en $\mathcal{E}$) existe una función $\mathbb{P}(A|\mathcal{E})$ en $L^1(X, \mathcal{E}, \mu)$ tal que

   $$\int_B \mathbb{P}(A|\mathcal{E})\ d\mu = \mu(A \cap B)$$

   para todo $B$ en $\mathcal{E}$. Llamamos a $\mathbb{P}(A|\mathcal{E})$ la *probabilidad condicional de $A$ con respecto a $\mathcal{E}$*. Demuestre que $0 \leq \mathbb{P}(A|\mathcal{E}) \leq 1$ $\mu$-casi siempre.

   (b) Sean $E_1, E_2, \ldots, E_n$ una partición de $X$ en subconjuntos en $\mathcal{A}$ disjuntos todos con medida positiva y suponga de ahora en adelante que $\mathcal{E} = \sigma(E_1, E_2, \ldots, E_n)$. Demuestre que

   $$\mathbb{P}(A|\mathcal{E}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu(A \cap E_j)}{\mu(E_j)} \chi_{E_j}$$

   para todo $A$ en $\mathcal{A}$.
   *Pista:* Demuestre que $(\chi_{E_1}, \chi_{E_2}, \ldots, \chi_{E_n})$ es una base de $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.

   (c) Considere a $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ con el producto interno estandard. Demuestre que $L^2(X, \mathcal{E}, \mu)$ es un subespacio cerrado. Defina para $f$ en $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ a $\mathbb{E}[f|\mathcal{E}]$, el *valor esperado condicional de $f$ con respecto a $\mathcal{E}$*, como la proyección de $f$ a $L^2(X, \mathcal{E}, \mu)$. Muestre que $\mathbb{E}[\chi_A|\mathcal{E}] = \mathbb{P}(A|\mathcal{E})$ para todo $A$ en $\mathcal{A}$.

   (d) Defina una relación binaria $\sim$ en $\mathcal{A}$ de modo que $A \sim B$ si y solo si $\mu(A \triangle B) = 0$, denote $\mathbb{A} := \mathcal{A}/\sim$. Defina $d([A]_\sim, [B]_\sim) := \mu(A \triangle B)$ para $A$ y $B$ en $\mathcal{A}$ y demuestre que $d$ es una métrica bien definida en $\mathbb{A}$. Demuestre que las funciones $\chi : \mathbb{A} \to L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $\mathbb{P}_\mathcal{E} : \mathbb{A} \to L^1(X, \mathcal{E}, \mu)$ definidas por $\chi(a) := \chi_A$ y $\mathbb{P}_\mathcal{E}(a) := \mathbb{P}(A|\mathcal{E})$ para todo $a = [A]_\sim$ en $\mathbb{A}$ están bien definidas y son continuas. ¿Son Lipschitz-contiunas? De ser el caso, encuentre constantes de Lipschitz.