Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración

Taller 13

Teorema de Riesz; medidas signadas.

Fecha de entrega: 09 de mayo de 2024

---

1. Demuestre el *lema de Riemann-Lebesgue*: Sea $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$ y defina $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x t} f(x)\,\mathrm{d}x$. Demuestre que $\lim_{t\to\infty} \widehat{f}(t) = 0$.

   Hint. Puede hacer una prueba más o menos directa (primero se prueba la afirmación para funciones simples tipo $\chi_{(a,b)}$, luego se mustra para funciones medibles simples nonegativas y luego para cualquier $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$). Otra opción es hacer el cambio de variable $y = x + \frac{1}{2}\frac{t}{t^2}$ en la integral y usar el Ejercicio 3(a) del Taller 11.

2. Sea X una espacio topológico con la topología discreta sea $I : C_c(X) \to \mathbb{R},\ If = 0$ el funcional lineal trivial y defina

$$\mu : \mathbb{P}X \to [0,\infty], \quad \mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{A is contable,} \\ \infty, & \text{A no is contable.} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \nu : \mathbb{P}X \to [0,\infty], \quad \nu(A) = 0.$$

   (a) Convenzase que μ es una medida (no tiene que escribirlo).
   (b) Demuestre que para todo $f \in C_c(X)$ se tiene que

$$If = \int_X f\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\nu.$$

   ¿Contradice el teorema de representación de Riesz? ¿Cuál es la medida que viene del teorema de Riesz?

3. Sea μ una medida con signo sobre la σ-álgebra $\mathfrak{A}$ y sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$. Demuestre

   (i) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \quad \Longrightarrow \quad \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$,

   (ii) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ y $|\mu(A_1)| < \infty \quad \Longrightarrow \quad \mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

4. Sea $\mu : \mathfrak{A} \to [-\infty,\infty)$ una medida con signo sobre la σ-álgebra $\mathfrak{A}$ y sea $A \in \mathfrak{A}$ con $\mu(A) > -\infty$.

   (a) Demuestre que para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $B \subseteq A$, $B \in \mathfrak{A}$ tal que $\mu(B) \geq \mu(A)$ y que para todo $C \subseteq B$, $C \in \mathfrak{A}$ se tiene que $\mu(C) \geq -\varepsilon$.
   (b) Demuestre que existe una sucesión $A \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ de conjuntos $B_j \in \mathfrak{A}$ tal que $\mu(A) \leq \mu(B_1) \leq \mu(B_2) \leq \dots$ y $\mu(C) > -\frac{1}{n}$ para todo $C \in \mathfrak{A}$ con $C \subseteq B_n$.
   (c) Demuestre que existe un conjunto $B \in \mathfrak{A}$ μ-positivo con $B \subseteq A$ y $\mu(B) \geq \mu(A)$.

Definiciones que veremos el lunes:
Sea $(X,\mathfrak{A})$ un espacio medible. Una función $\mu : \mathfrak{A} \to [-\infty,\infty)$ se llama una *medida signada* si

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) σ-aditividad: $\mu(\dot\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ para $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$ con $A_j \cap A_k = \emptyset$ si $j \neq k$.