

# Teoría de Medida e Integración

Taller 12

Regularidad de medidas.

Fecha de entrega: 02 de mayo de 2024

---

1. Muestre que la medida de Borel en  $\mathbb{R}$  es regular.
2. Sea  $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  la compactificación del espacio discreto  $(\mathbb{N}, \mathbb{P}\mathbb{N})$ . Muestre:
  - (a) Un conjunto  $A \subseteq X$  es compacto, si y sólo si es finito o contiene  $\infty$ .
  - (b) Muestre que la medida de conteo sobre  $X$  no es localmente finita, no es outer regular, pero es inner regular.

Sobre  $\mathbb{R}$  consideramos  $\mathcal{T}$  la topología usual (euclidiana) y la topología  $\mathcal{T}_r$  generada por los conjuntos  $[a, b)$ . ( $\mathcal{T}_r$  se llama la *topología de Sorgenfrey* o *right sided topology*). Sean  $\mathfrak{B}$  y  $\mathfrak{B}_r$  las  $\sigma$ -álgebras de Borel generadas por  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}_r$  y  $\beta$  la medida de Borel.

3.
  - (a) Muestre que los conjuntos  $[a, b)$  son cerrados en  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_r)$  y que  $\mathcal{T}_r$  es más fino que  $\mathcal{T}$  (es decir que  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_r$ ).
  - (b) Sean  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión estrictamente creciente y  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión estrictamente decreciente en  $\mathbb{R}$ , y defina  $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  y  $B := \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Determine  $\overline{A}$  y  $\overline{B}$  y muestre que  $\overline{A}$  no es compacto, mientras  $\overline{B}$  es compacto si  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada.
  - (c) Sea  $K \subseteq \mathbb{R}$  compacto en la topología  $\mathcal{T}_r$ . Muestre que existe una función inyectiva  $K \rightarrow \mathbb{Q}$  y deduzca que  $K$  es contable.  
(Observa que por parte (c) para todo  $x \in K$  existe un  $y_x \in \mathbb{Q}$  tal que  $y_x < x$  y  $[y_x, x) \cap K = \emptyset$ . En particular,  $K \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $x \mapsto y_x$  es creciente.)
4. Considere  $\mathbb{R}$  con la topología  $\mathcal{T}_r$ .
  - (a) Muestre que  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_r$ .
  - (b) Muestre que  $\beta$  es outer regular, pero no inner regular para la topología  $\mathcal{T}_r$ .
  - (c) Defina

$$\nu : \mathfrak{B}_r \rightarrow [0, \infty], \quad \nu(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ es contable,} \\ \infty, & A \text{ no es contable.} \end{cases}$$

Muestre que  $\nu$  es una medida de Borel (es decir, que es una medida y que  $\nu(K) < \infty$  para conjuntos compactos  $K \subseteq \mathbb{R}$ ). Determine si  $\nu$  es localmente finita, inner regular o outer regular.