Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración

Taller 11

Fubini. Teorema de transformación

Fecha de entrega: 25 de abril de 2024

---

1. Sean $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ y $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ espacios de medida (no necesariamente σ-finitos) y sea ϱ una medida sobre $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ tal que $\varrho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ si $A \in \mathfrak{A}$ y $B \in \mathfrak{B}$. Muestre que para $f \in \mathscr{L}_1(X)$ y $g \in \mathscr{L}_1(Y)$ la función

$$h : X \times Y \to \mathbb{R}, \qquad h(x, y) = f(x)g(y)$$

pertenece a $\mathscr{L}_1(X \times Y)$ y que

$$\int_{X\times Y} h \,\mathrm{d}\varrho = \left(\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right) \cdot \left(\int_Y g \,\mathrm{d}\nu\right).$$

En los ejercicios que siguen, consideramos $\mathbb{R}^n$ con la medida de Borel β^n y para una función integrable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ escribimos $\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}^n} |f| \,\mathrm{d}\beta^n$.

Sin prueba puede utilizar el siguiente hecho: Si $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe una función $h \in C_c(\mathbb{R}^n)$ (función continua con soporte compacto) tal que $\|f - h\|_1 < \varepsilon$.

---

2. Sean $f, g \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$ y defina $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $\varphi(x, y) := f(x - y)g(y)$.

   (a) Demuestre que φ es Borel-medible, que es integrable y que $\|\varphi\|_1 \le \|f\|_1\|g\|_1$.

   (b) Sea $A := \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x, \cdot) \text{ no es integrable respecto a } y\}$. Muestre que $\beta^n(A) = 0$.

   (c) Sea

   $$f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ (f * g)(x) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) \,\mathrm{d}\beta^n(y), & x \in \mathbb{R}^n \setminus A, \\ 0 & x \in A. \end{cases}$$

   Demuestre que $f * g \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$ y que $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1\|g\|_1$.

3. Sea $(g_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq L_1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{j\to\infty} d_j = 0$ donde $d_j := \inf\{\|x\| : x \in \operatorname{supp} g_j\}$. Muestre para todo $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$ que

$$\|f * g_j - f\|_1 \to 0.$$

4. Sean $f, g \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$ y suponga que f es acotada. Demuestre que $f * g$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicios voluntarios

5. Sea $f : X \to Y$ una función medible donde $(X, \mathfrak{A}, \mu$ es un espacio de medida y $(Y, \mathfrak{B})$ es un espacio medible. En $(Y, \mathfrak{B})$ definimos la medida ν por

$$\nu(B) := \mu(g^{-1}(B)).$$

   (a) Demuestre que una función $h : Y \to \mathbb{R}$ es medible si y solo si $h \circ g : X \to \mathbb{R}$ es medible.

   (b) Demuestre que una función $f : Y \to \mathbb{R}$ es integrable si y solo si $f \circ g : X \to \mathbb{R}$ es integrable y demuestre que en este caso

$$\int_Y f \,\mathrm{d}\nu = \int_X f \circ g \,\mathrm{d}\nu.$$

   Hint. Demuestre la afirmación primero para funciones simples nonnegativas.

6. Under construction ...