Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración

Taller 10

Coordenadas polares y volumen de la bola en $\mathbb{R}^n$. Fecha de entrega: 18 de abril de 2024

---

1. Las coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, son definidas recursivamente por $\Phi_n : D_n \to \mathbb{R}^n$ donde para $n \geq 2$

$$D_2 := [0,\infty) \times [-\pi,\pi], \qquad D_{n+1} := [0,\infty) \times [-\pi,\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^{n-1},$$

y

$$\Phi_2(r,\vartheta_1) = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta_1 \\ r\sin\vartheta_1 \end{pmatrix}, \qquad \Phi_{n+1}(r,\vartheta_1,\vartheta_2,\dots,\vartheta_n) := \begin{pmatrix} \cos(\vartheta_n)\cdot\Phi_n(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1}) \\ r\sin\vartheta_n \end{pmatrix}.$$

Muestre para todo $n \geq 2$, $(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1}) \in D_n$ y $\alpha \geq 0$:

(a) $\|\Phi_n(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1})\|_2 = r, \quad \Phi_n(\alpha r,\vartheta_1,\dots\vartheta_{n-1}) = \alpha\Phi_n(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1})$.

(b) $\Phi_n : D_n \to \mathbb{R}^n$ es sobreyectiva.

(c) $\det \mathrm{D}\Phi_n(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1}) = r^{n-1}\cos\vartheta_2\cdot\dots\cdot(\cos\vartheta_{n-1})^{n-2}$.

(d) Defina $D_n' := (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})^{n-2}$ y muestre que

$$\Phi_n : D_n' \to \Phi_n(D_n')$$

es un C^∞-difeomorfismo y que existe un conjunto N_n con medida de Lebesgue 0 tal que $\Phi_{n+1}(D_n') = \mathbb{R}^n \setminus N_n$.

2. Sea $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ la norma euclidiana de un vector $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Muestre

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\|x\|^2}\,\mathrm{d}^n x = \pi^{n/2}. \tag{$*$}$$

3. Sea $\quad \Gamma : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \Gamma(x) := \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t. \qquad$ Demuestre

(a) Para $x > 0$ fijo, la función $f_x : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_x(t) := \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ es Lebesgue-integrable.

(b) Γ es de clase C^∞ y para $x \in (0,\infty)$ y $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}(\ln(t))^k t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

(c) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x > 0)$.

(d) $\Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N})$.

4. Sea κ_n el volumen de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$. Muestre para $n \in \mathbb{N}$:

$$\kappa_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \begin{cases} \frac{2^{k+1}\pi^k}{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2k+1)}, & \text{si } n = 2k+1 \text{ con } k \in \mathbb{N}_0, \\ \frac{\pi^k}{k!}, & \text{si } n = 2k \text{ con } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Hint. Calcule la integral $\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\|z\|^2}\,\mathrm{d}z$ utilizando coordenadas polares y compare con $(*)$.

Ejercicios voluntarios

5. Sea $f : X \to Y$ una función medible donde $(X, \mathfrak{A}, \mu$ es un espacio de medida y $(Y, \mathfrak{B})$ es un espacio medible. En $(Y, \mathfrak{B})$ definimos la medida ν por

$$\nu(B) := \mu(g^{-1}(B)).$$

   (a) Demuestre que una función $h : Y \to \mathbb{R}$ es medible si y solo si $h \circ g : X \to \mathbb{R}$ es medible.

   (b) Demuestre que una función $f : Y \to \mathbb{R}$ es integrable si y solo si $f \circ g : X \to \mathbb{R}$ es integrable y demuestre que en este caso

$$\int_Y f \,\mathrm{d}\nu = \int_X f \circ g \,\mathrm{d}\nu.$$

   Hint. Demuestre la afirmación primero para funciones simples nonnegativas.

6. Under construction ...