Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración Taller 8

Teorema Lebesgue. Convergencia. Fecha de entrega: 04 de abril de 2024

En los problemas 1, 2 y 3 suponemos que todas las funciones f y f_n son medibles.

1. (a) Si f_n converge casi uniformemente, entonces existe una función medible f, tal que $f_n \to f$ μ-casi siempre.

(b) Supongamos que $f_n \to f$ en medida y que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy para convergencia casi uniforme. Muestre que $f_n \to f$ casi uniformemente.

2. (a) Suponga que $f_n \to f$ en medida. Muestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge μ-casi siempre a f.

(b) Muestre que el teorema de Lebesgue sigue siendo válido si suponemos $f_n \to f$ en medida en vez de $f_n \to f$ μ-casi siempre.

3. Suponga que $\mu(X) < \infty$. Muestre que $f_n \to f$ en medida si y sólo si cada subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión que converge μ-casi siempre a f. Muestre que en general no es equivalente si $\mu(X) = \infty$.

4. De las siguientes sucesiones de funciones determine si convergen puntualmente, si convergen μ-casi siempre, si convergen en medida, si convergen casi uniforme, si convergen en $\mathscr{L}_p$. Si convergen, halle la función límite.

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n = \chi_{[n,\infty)},$$

$$g_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad g_n = \chi_{[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]}, \qquad \text{con } \; n = 2^k + j \;\; (j = 0, \dots, 2^k - 1),$$

$$h_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad h_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \le x \le 1/n, \\ 2n - n^2 x, & 1/n < x \le 2/n, \\ 0, & 2/n < x \le 1. \end{cases}$$

Ejercicios voluntarios

---

5. *Lema de Riemann-Lebesgue.* Sea $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$ y $\widetilde{f}$ su transformada de Fourier. Muestre que $\lim_{t\to\infty} \widetilde{f}(t) = 0$.

Hint. Muestre la afirmación primero para funciónes simples.

6. Para $a > 0$ y $t > 0$ muestre para las integrales impropias de Riemann:

$$\int_0^\infty \frac{t}{t^2+x^2}\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-at}, \qquad \int_0^\infty \frac{x}{t^2+x^2}\sin(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-at}.$$

¿Existen las integrales como integrales de Lebesgue?

Hint. Para la primera integral, muestre que la función

$$f_a(t) := \int_0^\infty \frac{t}{t^2+x^2}\cos(ax)\,\mathrm{d}x$$

satisface la ecuación diferencial $f_a'' = a^2 f_a$ derivando baja la integral y utlizando intergación por partes.

7. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f : I \to \mathbb{R}$ localmente Riemann-integrable (es decir, su restricción a cualquier compacto es Riemann-integrable). Demuestre que f es Lebesgue-integrable si y sólo si la integral impropia de Riemann de $|f|$ sobre I existe y que en este caso la integral de Riemann de f coincide con la integral de Lebesgue de f.

   Caso especial: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente Riemann-integrable. Entonces f es Lebesgue-integrable si y sólo si la integral impropia de Riemann

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x := \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

   existe y en este caso, $R\text{-}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\lambda$, donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

8. Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Demuestre que f es Lebesgue integrable y calcule su integral (sin usar la integral de Riemann).