Teoría de Medida e Integración

Taller 6

Teoremas de Fatou, Levi y Lebesgue.

Fecha de entrega: 14 de marzo de 2024

---

1. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}_1(X)$ y $f \in \mathscr{L}_1(X)$ tal que $f_n \to f$ μ-c.s. y $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X |f_n| \, \mathrm{d}\mu = \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu$. Muestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0$.

2. Una función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ se llama *absolutamente continua*, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y toda partición $a \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \cdots \leq \alpha_n < \beta_n \leq b$ se tiene que
$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n} |g(\beta_j) - g(\alpha_j)| < \varepsilon.$$
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrable. Muestre que la siguiente función es absolutamente continua:
$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t := \int_{[a,x]} f \, \mathrm{d}\mu.$$

3. Muestre que $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{n}}}{(1 + \frac{x}{n})^n} \, \mathrm{d}x = 1.$

4. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida, $\alpha \in (0, \infty)$ y $f : X \to [0, \infty]$ una función medible con $\int_X f \, \mathrm{d}\mu := c \in (0, \infty)$. Calcule
$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\left(1 + (f/n)^\alpha\right) \mathrm{d}\mu.$$
Hint. Si $\alpha \geq 1$, entonces el integrando es $\leq \alpha f$; aplique el lema de Fatou, si $\alpha \in (0, 1)$.

Ejercicio voluntario

---

5. Sea $M \subset \mathbb{R}$ un conjunto de Lebesgue con $\lambda(M) < \infty$. Muestre que para cada $\varepsilon > 0$ existe una *step function*[1] φ tal que
$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_M - \varphi| \, \mathrm{d}\lambda < \varepsilon.$$

[1]Una *step function* es una función de la forma $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{V_j}$ con $n \in \mathbb{N}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$ y los V_j son intervalos abiertos o singletons para $j = 1, \ldots, n$.