Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración

Taller 6

Integración sobre subespacios. Teoremas de Fatou y Levi. Fecha de entrega: 08 de marzo de 2024

---

1. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Para $B \in \mathfrak{A}$, $B \neq \emptyset$ definimos $\mathfrak{A}_B := \{A \cap B : A \in \mathfrak{A}\}$ y $\mu_B := \mu|_{\mathfrak{A}_B}$. Sabemos que $(B, \mathfrak{A}_B, \mu_B)$ es un espacio de medida.

   (a) Muestre que $f|_B$ es $\mathfrak{A}_B$-medible si y solo si $\chi_B \cdot f$ es $\mathfrak{A}$-medible.

   Suponemos para el resto del ejercicio que $\chi_B \cdot f$ es medible.

   (b) Si $f \geq 0$, muestre que $\displaystyle\int_B f|_B \,\mathrm{d}\mu_B = \int_X \chi_B \cdot f \,\mathrm{d}\mu.$ $(*)$

   (c) Muestre: $\chi_B \cdot f \in \mathscr{L}_1(X, \mathfrak{A}, \mu) \iff f|_B \in \mathscr{L}_1(B, \mathfrak{A}_B, \mu_B)$. En este caso, $(*)$ vale.

2. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f : X \to [0, \infty]$ una función medible. Demuestre

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu < \infty \quad \Longrightarrow \quad f < \infty \ \mu\text{-casi siempre.}$$

3. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida y $(E_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ tal que $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) < \infty$. Muestre que casi todo $x \in X$ pertenecen a lo sumo a finitos conjuntos E_j.

   Hint. Funciones características y teorema de convergencia monótona.

4. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f \in \mathscr{L}_1(X)$ con $f \geq 0$. Muestre que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $A \in \mathfrak{A}$ con $\mu(A) < \delta$

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

   Hint. Teorema de convergencia monótona aplicado a $f_n(x) := \min\{n, f(x)\}, (x \in X)$.

Ejercicio voluntario

---

5. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida, $(X, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ su completación y $\varphi : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathfrak{A}_0$-simple. Muestre que existen funciones ψ_1, ψ_2, $\mathfrak{A}$-simples, tales que $\psi_1 \leq \varphi \leq \psi_2$ y $\mu(\{\psi_1 \neq \psi_2\}) = 0$. Muestre que para tales funciones $\int_X \psi_1 \,\mathrm{d}\mu = \int_X \psi_2 \,\mathrm{d}\mu$ si por lo menos una de las integrales existe.

Theorem (Convergencia monótona). *Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles $X \to [0, \infty]$ con $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ y sea $f := \lim_{n\to\infty} f_n$. Entonces f es medible y $\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$.*