Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración

Taller 5

Funciones simples; integración. Fecha de entrega: 29 de febrero de 2024

---

1. Sea $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_0(x) = x$. Defina la secuencia de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ donde:

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x-2) & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

   (a) Demuestre que existe una función $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a G.[1]

   (b) *Ejercicio voluntario:* Pruebe que G es uniformemente continua y creciente. Si C es el conjunto de Cantor pruebe que G es constante en cada intervalo abierto de $[0,1] \setminus C$ y que $G(C) = [0,1]$.

   (c) Para cualquier subconjunto $A \subset [0,1]$, $G^{-1}(A)$ es Lebesgue-medible.

   (d) Considere $f(x) = x + G(x)$. Muestre que $\lambda(f(C)) = 1$. Usando el Ejericico 4(c) del taller 4 tome V no Lebesgue-medible $V \subset f(C)$ y pruebe que $f^{-1}(V)$ es Lebesgue-medible pero no de Borel (note que f es estrictamente creciente).

2. Sea $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ como en el problema 1 del taller 3. Determine todas las funciones medibles $f : X \to [0,\infty]$ y su integral $\displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\mu$.

3. Sea $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ un espacio de medida no completo y sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones tal que $f = g$ μ-casi siempre. ¿Se puede concluir que

$$f \text{ medible} \quad \Longleftrightarrow \quad g \text{ medible ?}$$

4. Sea $(X, \mathfrak{M})$ un espacio medible. Una función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ se llama *simple* si es medible y si su imagen es finito.

   (a) Demuestre que $E(X, \mathfrak{A}) := \{\varphi : X \to \mathbb{R} : \varphi \text{ es función simple}\}$ es un espacio vectorial.

   (b) Suponga que $\mu(X) < \infty$. Demuestre que

$$I : E(X, \mathfrak{A}) \to \mathbb{R}, \quad I\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$

   es una función lineal y que existe una constante $C \geq 0$ tal que $|I(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_\infty$.

---

[1] Observe que si en vez de f_0 tomamos cualquier función g_0 acotada, la misma construcción converge uniformemente a la misma función G, que se llama la función de Cantor.

Ejercicio voluntario

5. Denotemos por S_∞ al grupo de permutaciones de $\mathbb{N}$ y fijemos σ en S_∞. Dado x en $[0,1)$, denotemos por $0_2x_1x_2x_3\ldots x_n\ldots$ a su expansión binaria ($x_n \in \{0,1\}$ y suponemos que no existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 1$ para todo $n \geq N$) y definimos $\sigma \cdot x := 0_2x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}\ldots x_{\sigma(n)}\ldots$. Sea λ la medida de Lebesgue en $[0,1)$.

   (i) Demuestre que esta es una acción de S_∞ en $[0,1)$ y que la transformación $x \mapsto \sigma \cdot x$ es Borel-medible para todo σ en S_∞.

   (ii) Demuestre que para todo σ y τ en S_∞ el conjunto $\{x \in [0,1) \ : \sigma \cdot x \neq \tau \cdot x\}$ es Boreliano y, si $\sigma \neq \tau$, tiene medida de Lebesgue positiva.

   (iii) Demuestre que σ *preserva la medida* (o bien, $\lambda(E) = \lambda\left(\sigma^{-1}(E)\right)$ para todo subconjuto medible E).

   Pista: Recuerde el primer ejercicio de la primera tarea. ¿Cómo actúa σ en los intervalos $Q_{z,k}$?