Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración

Taller 4

Un conjunto no Lebesgue-medible.

Fecha de entrega: 22 de febrero de 2024

Sea $I = \{[a,b) : a \leq b\} \subseteq \mathbb{PR}$ y sea $\lambda_0 : I \to \mathbb{R},\ \lambda_0([a,b)) = b - a$. Ya sabemos que λ_0 es un contenido σ-aditivo en I. Sea λ_0^* la medida exterior generada por λ y sean

- $\mathfrak{B} = \sigma(I) =$ la sigma álgebra generada por I,
- $\mathfrak{M} = \{M \subseteq \mathbb{R} : M \text{ es } \lambda^*\text{-medible}\}$.

Entonces $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$ y λ_0 tiene una extensión única a una medida λ en $\mathfrak{M}$ (¿por qué?). Esta medida λ se llama la *medida de Lebesgue*.

---

1. Sean $\mathfrak{A}_0$ un álgebra sobre un conjunto X y $\mathfrak{A}$ la σ-álgebra generada por $\mathfrak{A}_0$. Sea μ una medida finita sobre $\mathfrak{A}$. Demuestre que para todo $A \in \mathfrak{A}$ existe una sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}_0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \Delta C_n) = 0.$$

2. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida donde μ es σ-finita. Sea μ^* la medida exterior generada por μ. Muestre que para todo $Y \subseteq X$ existe un conjunto $A \in \mathfrak{A}$ tal que

$$Y \subseteq A, \qquad \mu^*(Y) = \mu(A), \qquad \mu^*(B) = 0 \text{ para todo } B \in \mathfrak{A} \text{ con } B \subseteq A \setminus Y.$$

3. Sea λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y $\mathfrak{M}$ como arriba. Muestre: Si $M \in \mathfrak{M}$ y $\lambda(M) > 0$, existe un $N \in \mathfrak{M}$ tal que $N \subseteq M$ y

$$\lambda(N) > 0 \qquad \text{y} \qquad \lambda(M \setminus N) > 0.$$

(Se dice que *la medida de Lebesgue no tiene átomos.*)

4. (a) No existe ninguna medida μ sobre el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathbb{PR})$ tal que μ es invariante bajo translación y $0 < \mu([0,1)) < \infty$.
   (b) Existe un conjunto $M \subseteq \mathbb{R}$ que no es Lebesgue-medible.
   (c) Demuestre que cada conjunto Lebesgue-medible A con $\lambda(A) > 0$ contiene un subconjunto no Lebesgue-medible.

   Hint para (a):

   - Define una relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}$ por $x \sim y :\iff x - y \in \mathbb{Q}$.
   - De cada clase escoja un representante en $[0,1)$. Sea M la unión de ellos.
   - Si μ es una medida como en (a), qué es $\mu(M) =$?