Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración

Taller 3

Extensión de una medida; conjunto de Cantor.

Fecha de entrega: 15 de febrero de 2024

---

1. Sea X un conjunto no contable y defina

$$\mathfrak{M} := \{E \subset X : E \text{ contable o } X \setminus E \text{ contable }\},$$

$$\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}, \quad \mu(E) := \begin{cases} 0, & E \text{ contable}, \\ 1, & X \setminus E \text{ contable}. \end{cases}$$

   (a) Muestre que $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra y μ es una medida sobre $\mathfrak{M}$.

   (b) Determine la medida exterior μ^*.

2. Para $\mu : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ contenido sobre un semianillo H, denotamos con μ^* la medida exterior generada por μ, y con $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ la σ-álgebra de los conjuntos μ^*-medibles.

   Sean $\mu, \nu : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ contenidos sobre un semianillo H. Muestre:

   (a) $(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*$.

   (b) $\mathfrak{A}_{(\mu+\nu)^*} \supseteq \mathfrak{A}_{\mu^*} \cap \mathfrak{A}_{\nu^*}$.

   (c) ¿Siempre es cierto que $\mathfrak{A}_{(\mu+\nu)^*} = \mathfrak{A}_{\mu^*} \cap \mathfrak{A}_{\nu^*}$?

3. Sea H un semianillo sobre X, $\sigma(H)$ la σ-álgebra generada por H y sean $\mu, \nu : \sigma(H) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ medidas con

   (i) $\mu(A) \leq \nu(A)$ para todo $A \in H$.

   (ii) $\nu|_H$ es σ-finita.

   Muestre que $\mu(B) \leq \nu(B)$ para todo $B \in \sigma(H)$.

4. *Un conjunto de Borel, no contable, con medida de Lebesgue* 0.

$$T := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \ : \ x_n \in \{0, 2\} \right\} =: \text{ conjunto de Cantor.}$$

   (a) Muestre que T es cerrado, en particular es un conjunto de Borel.

   (b) Muestre que $\lambda(T) = 0$, donde λ es la medida de Lebesgue.

   (c) Muestre que T no es contable.