Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración

Taller 2

Contenidos, premedidas y medidas. Fecha de entrega: 08 de febrero de 2024

Definición. Sea X un conjunto y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{P}X$. El *límite superior* y el *límite inferior* de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se definen por

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \qquad \varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Se dice que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* si $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n$.

Definición. Una función $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama *función de salto* (*jump function*) si es de la forma

$$G(x) = \begin{cases} \alpha + \sum_{y\in A\cap[0,x)} p(y), & x > 0, \\ \alpha - \sum_{y\in A\cap[x,0)} p(y), & x \leq 0, \end{cases}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ contable y $p : A \to (0, \infty)$ con $\displaystyle\sum_{y\in A\cap[-n,n]} p(y) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

---

1. Para $a < b \in \mathbb{R}$ defina $[a, b)_{\mathbb{Q}} := [a, b) \cap \mathbb{Q}$.

   Sea $I = \{[a, b)_{\mathbb{Q}} \mid a, b \in \mathbb{Q},\, a < b\} \cup \{\emptyset\}$, $\mu([a, b)_{\mathbb{Q}}) = b - a$ para $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$, y $\mu(\emptyset) = 0$. Muestre:

   (i) I es un semianillo sobre $\mathbb{Q}$.

   (ii) μ es un contenido sobre I.

   (iii) μ no es una premedida sobre I.

2. Sea R un anillo sobre un X y $\mu : R \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ un contenido. Suponga que cada sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R$ con $\mu(A_1) < \infty$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n =: A \in R$ cumple $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

   ¿Se sigue que μ es una premedida sobre R? (Prueba o contraejemplo!)

3. Sea μ una premedida sobre un σ-anillo R y sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R$. Muestre:

   (a) $\mu\Big(\varliminf_{n\to\infty} A_n\Big) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

   (b) Si existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) < \infty$, entonces $\mu\left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \varlimsup_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

   (c) Si existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) < \infty$ y si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces $\mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

4. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente. Muestre:

(a) Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe el límite $\lim_{y \to x^-} F(y)$.

(b) Sea $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \Phi(x) = \lim_{y \to x^-} F(y)$. Muestre que Φ es creciente y que es continua por la izquierda.

(c) Suponga que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente y continua por al izquierda. Muestre que existen funciones crecientes $G, H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que G es continua, H es una función de salto, $F = G + H$ y $\mu_F = \mu_G + \mu_H$.