Universidad de los Andes
MATE-4220

# Teoría de Medida e Integración

Taller 1

Anillos, álgebras.

Fecha de entrega: 01 de febrero de 2024

---

1. Sea $\{Q_{z,k} \,:\, k \in \mathbb{N}_0, z \in \mathbb{Z}^n\}$ el conjunto de los cubos elementales
$$Q_{z,k} := \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, z_j/2^k \leq x_j \leq (z_j+1)/2^k,\ j = 1, \ldots, n\right\}.$$
Demuestre que cada conjunto abierto $\mathbb{R}^n$ es unión enumerable de cubos $Q_{z,k}$.

2. (a) Muestre que una $\sigma$-álgebra o es finita o no contable.
   (b) Un $\sigma$-anillo con infinitos elementos contiene una sucesión de subconjuntos disjuntos no vacíos.

3. Sea $X$ un conjunto contable infinito y defina
$$\mathfrak{A} := \{A \subseteq X : A \text{ ó } X \setminus A \text{ es finito }\},$$
$$\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \qquad \mu(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ finito}, \\ 1, & A \text{ infinito}. \end{cases}$$
   (a) Demuestre que $\mathfrak{A}$ es un álgebra sobre $X$.
   (b) Demuestre que $\mu$ es un contenido, pero que no es una premedida.

4. Sea $X, Y$ conjuntos, $f : X \to Y$, $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{P}Y$ y $\sigma(\mathcal{E})$ la $\sigma$-álgebra generada por $\mathcal{E}$. Demuestre que
$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$$
donde $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$ es la $\sigma$-álgebra generada por $f^{-1}(\mathcal{E}) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}\}$.

---

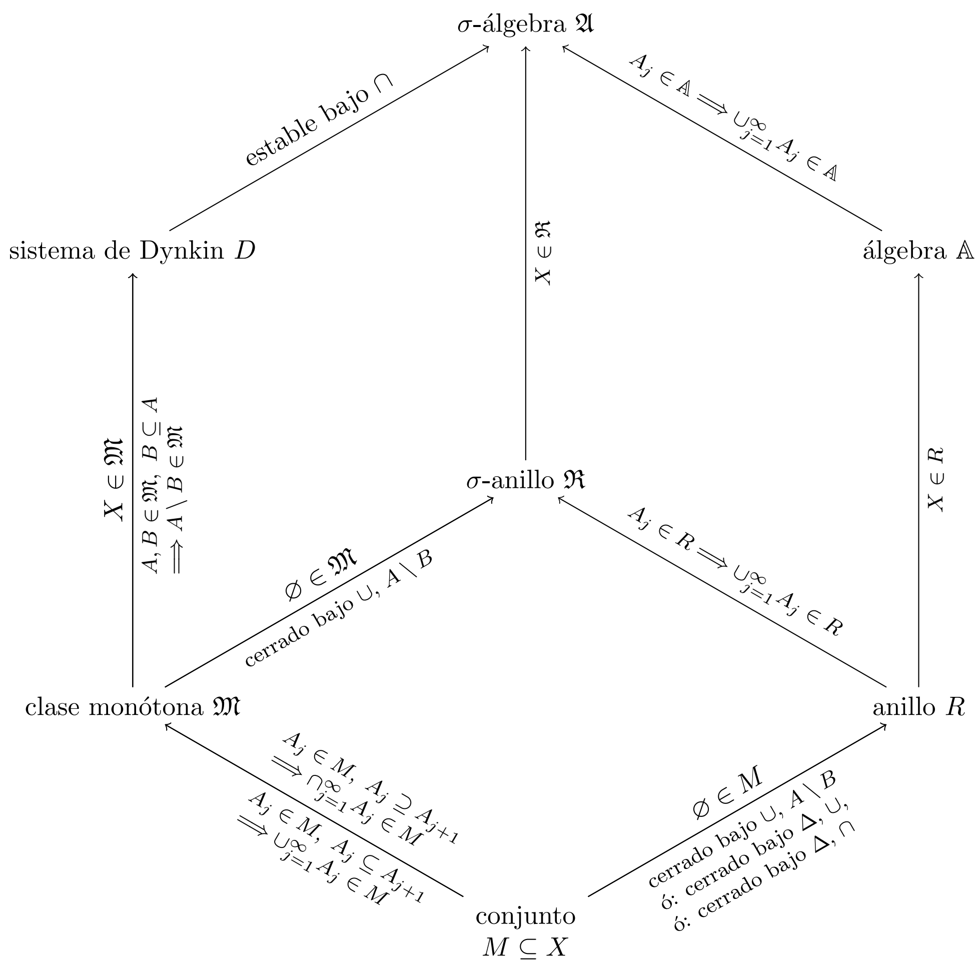
*Ejercicios voluntarios*

---

5. ¿La intersección de seminallos es un semianillo?

6. Sean $X, Y$ conjuntos, $f : X \to Y$ una función y $H$ un semianillo sobre $Y$.
¿Es $\{f^{-1}(A) : A \in H\} \subseteq \mathbb{P}X$ un semianillo sobre $X$?

7. Sea $X$ un conjunto no vacío. Un conjunto $R \subseteq \mathbb{P}(X)$ se llama *ideal* si es un anillo y si $A \cap B$ está en $R$ para todo $A$ en $R$ y todo $B$ en $\mathbb{P}(X)$. Un ideal $R$ es *maximal* si para todo ideal $R \subseteq R' \subseteq \mathbb{P}(X)$ se tiene $R' = R$ o $R' = \mathbb{P}(X)$.
Fije un elemento $x$ en $X$, y sea $R$ la familia de subconjuntos de $X$ que no contienen a $x$.
   (a) Muestre que $R$ es un ideal maximal de $P(X)$.
   (b) ¿Es $\mathbb{P}(X)/R$ un cuerpo? ¿A cuál cuerpo es isomorfo?




Gráfica adaptada de Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie, p. 25, y de https://de.wikipedia.org/wiki/Maßtheorie.