

Teoría de Medida e Integración

Taller 15

Variación acotada. Espacios \mathcal{L}_p .

Fecha de entrega: 26 de mayo de 2022

1. Sean $f, g : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Muestre:

- (a) Si $f = g$ en λ^s -casi todas partes, entonces $f = g$.
- (b) $\text{esssup } |f| = \sup |f|$.

2. Sean $0 < p_1 < p_2 < \infty$.

- (a) Si (X, \mathfrak{A}, μ) es un espacio de medida con $\mu(X) < \infty$, entonces $\mathcal{L}_{p_2}(\mu) \subset \mathcal{L}_{p_1}(\mu)$.
- (b) Si X es contable (finito o infinito) y μ la medida de conteo sobre X , entonces $\mathcal{L}_{p_1}(\mu) \subset \mathcal{L}_{p_2}(\mu)$. Si X es infinito contable, se cumple la inclusión estricta $\mathcal{L}_{p_1}(\mu) \subsetneq \mathcal{L}_{p_2}(\mu)$.

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^s)$ con $0 \leq \varphi \leq 1$ y

$$(a) \quad \varphi(x) = 0 \text{ para } |x| \geq 1, \quad (b) \quad \int_{\mathbb{R}^s} \varphi \, dx = 1.$$

Para $\varepsilon > 0$ defina $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-s} \varphi(x/\varepsilon)$. Entonces $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^s)$, $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq \varepsilon^{-s}$ y

$$(a') \quad \varphi_\varepsilon(x) = 0 \text{ para } |x| \geq \varepsilon, \quad (b') \quad \int_{\mathbb{R}^s} \varphi_\varepsilon(x) \, dx = 1.$$

$(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ es una familia de *mollifiers*,

3. Sean $1 \leq p < \infty$, $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^s)$ y φ y $\{\varphi_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ como arriba. Muestre:

- (a) $\varphi(y - \cdot) \cdot f(\cdot) \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^s)$, $y \in \mathbb{R}^s$.
- (b) $\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$.
- (c) $\text{supp}(\varphi * f) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(\varphi)$.
- (d) Si $f \in C_c(\mathbb{R}^s)$, entonces $\varphi_\varepsilon * f$ converge uniformemente a f si $\varepsilon \rightarrow 0$, es decir,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^s} \{|\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)|\} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

4. (a) $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^s)$, entonces $\varphi_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$.
(b) $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^s)$ con soporte compacto, entonces $\varphi_\varepsilon * f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^s)$.
(c) $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^s)$ con $1 \leq p < \infty$, entonces $\varphi_\varepsilon * f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^s)$ y

$$\|\varphi_\varepsilon * f\|_p \leq \|f\|_p, \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \|\varphi_\varepsilon * f - f\|_p \rightarrow 0.$$