Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración

Taller 14

Medidas signadas; teorema de Radon-Nikodym. Fecha de entrega: 19 de mayo de 2022

---

1. Sean μ, ν medidas complejas sobre una σ-álgebra $\mathfrak{A}$. Muestre que $\nu \ll \mu$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|\nu(A)| < \varepsilon$ si $A \in \mathfrak{A}$ con $|\mu|(A) < \delta$.

2. Sea $(X, \mathfrak{A})$ un espacio medible, sean μ y ν medidas con signo sobre $\mathfrak{A}$.
   (a) Demuestre que para todo a $A \in \mathfrak{A}$ lo siguiente es equivalente:
      (i) A es μ-nulo.
      (ii) A es μ^+-nulo y μ^--nulo.
      (iii) A es $|\mu|$-nulo.
   (b) Demuestre que lo siguiente es equivalente:
      (i) $\mu \perp \nu$.
      (ii) $\mu^+ \perp \nu$ y $\mu^- \perp \nu$.
      (iii) $|\mu| \perp \nu$.
      (iv) $|\mu| \perp |\nu|$.

3. Sea $\mathfrak{B}$ la σ-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$ y β la medida de Borel-Lebesgue sobre $\mathfrak{B}$. Sea μ una medida de Borel sobre $\mathbb{R}$ tal que la función de distribución

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} -\mu((x,0]), & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \mu((0,x]), & x > 0 \end{cases}$$

es derivable y φ' es continua. Muestre que $\varphi'(x) = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\beta}(x) =$ la derivada de Radon-Nikodym.

4. Sean μ, ν, ω medidas σ-finitas sobre la σ-álgebra $\mathfrak{A}$ con $\mu \ll \nu \ll \omega$. Muestre que $\mu \ll \omega$ y que

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\omega}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}.$$

Ejercicio voluntario

---

5. Sea $(X, \mathfrak{A})$ un espacio medible y sean μ y ν medidas con signo y sea $\nu = \varrho + \sigma$ la descomposición de ν de Lebesgue con respecto a μ.

   Demuestre que $|\nu| = |\varrho| + |\sigma|$ es la descomposición de $|\nu|$.