Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración

Taller 13

Medidas complejas; teorema de Radon-Nikodym.

Fecha de entrega: 12 de mayo de 2022

---

1. Sea μ una medida con signo sobre la σ-álgebra $\mathfrak{A}$ y sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}$. Demuestre

   (i) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \quad \Longrightarrow \quad \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n),$

   (ii) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ y $|\mu(A_1)| < \infty \quad \Longrightarrow \quad \mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$

2. Sea $\mu : \mathfrak{A} \to [-\infty, \infty)$ una medida con signo sobre la σ-álgebra $\mathfrak{A}$ y sea $A \in \mathfrak{A}$ con $\mu(A) > -\infty$.

   (a) Demuestre que para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $B \subseteq A$, $B \in \mathfrak{A}$ tal que $\mu(B) \geq \mu(A)$ y que para todo $C \subseteq B$, $C \in \mathfrak{A}$ se tiene que $\nu(C) \geq -\varepsilon$.

   (b) Demuestre que existe una sucesión $AB_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ de conjuntos $B_j \in \mathfrak{A}$ tal que $\mu(A) \geq \mu(B_1) \geq \mu(B_2) \geq \dots$ y $\mu(C) > -\frac{1}{n}$ para todo $C \in \mathfrak{A}$ con $C \subseteq B_n$.

   (c) Demuestre que existe un conjunto $B \in \mathfrak{A}$ con $B \subseteq A$ y B es μ-positivo.

3. Sean μ, ν medidas complejas sobre una σ-álgebra $\mathfrak{A}$. Muestre que $\nu \ll \mu$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|\nu(A)| < \varepsilon$ si $A \in \mathfrak{A}$ con $|\mu|(A) < \delta$.

4. Sea $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ una medida compleja.

   (a) Muestre que existe una función $g : X \to \mathbb{C}$ tal que $|g| = 1$ y $\mu = g \odot |\mu|$.

   (b) Para $f \in \mathscr{L}_1(X, \mu)$ muestre que $f \in \mathscr{L}_1(X, |\mu|)$ y que

   $$\left| \int_X f \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}|\mu|,$$

   donde

   $$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \int_X f \,\mathrm{d}\,\mathrm{Re}(\mu)^+ - \int_X f \,\mathrm{d}\,\mathrm{Re}(\mu)^- + \mathrm{i} \int_X f \,\mathrm{d}\,\mathrm{Im}(\mu)^+ + \mathrm{i} \int_X f \,\mathrm{d}\,\mathrm{Im}(\mu)^-.$$

Definiciones que veremos el lunes:
Sea $\mathfrak{A}$ una σ-álgbra y sean μ, ν medidas signadas.
Un conjunto $B \in \mathfrak{A}$ se llama *μ-positivo* si $\mu(C) \geq 0$ para todo $C \subseteq B$. Un conjunto $B \in \mathfrak{A}$ se llama *μ-cero* si $\mu(C) = 0$ para todo $C \subseteq B$.
Se dice que ν es absolutamente continua con respecto a μ, si cada conjunto μ-cero también es ν-cero. En este caso se escribe $\nu \ll \mu$. Para todo $A \in \mathfrak{A}$ se define
$|\mu|(A) = \sup\Big\{ \sum_{j=1}^{n} |\mu(A_j)| : A_j \in \mathfrak{A}, \text{ disjuntos dos a dos, } A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \Big\}.$