

Teoría de Medida e Integración

Taller 11

Regularidad de medidas.

Fecha de entrega: 31 de abril de 2022

1. Muestre que la medida de Borel en \mathbb{R} es regular.
2. Sea $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la compactificación del espacio discreto $(\mathbb{N}, \mathbb{P}\mathbb{N})$. Muestre:
 - (a) Un conjunto $A \subseteq X$ es compacto, si y sólo si es finito o contiene ∞ .
 - (b) Muestre que la medida de conteo sobre X no es localmente finita, no es outer regular, pero es inner regular.

Sobre \mathbb{R} consideramos \mathcal{T} la topología usual (euclidiana) y la topología \mathcal{T}_r generada por los conjuntos $[a, b)$. (\mathcal{T}_r se llama la *topología de Sorgenfrey* o *right sided topology*). Sean \mathfrak{B} y \mathfrak{B}_r las σ -álgebras de Borel generadas por \mathcal{T} y \mathcal{T}_r y β la medida de Borel.

3.
 - (a) Muestre que los conjuntos $[a, b)$ son cerrados en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_r)$ y que \mathcal{T}_r es más fino que \mathcal{T} (es decir que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_r$).
 - (b) Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente decreciente en \mathbb{R} , y defina $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $B := \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Determine \overline{A} y \overline{B} y muestre que \overline{A} no es compacto, mientras \overline{B} es compacto si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada.
 - (c) Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto en la topología \mathcal{T}_r . Muestre que existe una función inyectiva $K \rightarrow \mathbb{Q}$ y deduzca que K es contable.
(Observa que por parte (c) para todo $x \in K$ existe un $y_x \in \mathbb{Q}$ tal que $y_x < x$ y $[y_x, x) \cap K = \emptyset$. En particular, $K \rightarrow \mathbb{Q}$, $x \mapsto y_x$ es creciente.)
4. Considere \mathbb{R} con la topología \mathcal{T}_r .
 - (a) Muestre que $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_r$.
 - (b) Muestre que β es outer regular, pero no inner regular para la topología \mathcal{T}_r .
 - (c) Defina

$$\nu : \mathfrak{B}_r \rightarrow [0, \infty], \quad \nu(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ es contable,} \\ \infty, & A \text{ no es contable.} \end{cases}$$

Muestre que ν es una medida de Borel (es decir, que es una medida y que $\nu(K) < \infty$ para conjuntos compactos $K \subseteq \mathbb{R}$). Determine si ν es localmente finita, inner regular o outer regular.