

# Teoría de Medida e Integración

Coordenadas polares y volumen de la bola en  $\mathbb{R}^n$ .

Fecha de entrega: 28 de abril de 2022

1. Las coordenadas polares en  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , son definidas recursivamente por  $\Phi_n : D_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde para  $n \geq 2$

$$D_2 := [0, \infty) \times [-\pi, \pi], \quad D_{n+1} := [0, \infty) \times [-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^{n-1},$$

y

$$\Phi_2(r, \vartheta_1) = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta_1 \\ r \sin \vartheta_1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{n+1}(r, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n) := \begin{pmatrix} \cos(\vartheta_n) \cdot \Phi_n(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}) \\ r \sin \vartheta_n \end{pmatrix}.$$

Muestre para todo  $n \geq 2$ ,  $(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}) \in D_n$  y  $\alpha \geq 0$ :

- $\|\Phi_n(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1})\|_2 = r$ ,  $\Phi_n(\alpha r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}) = \alpha \Phi_n(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1})$ .
- $\Phi_n : D_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es sobreyectiva.
- $\det D\Phi_n(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}) = r^{n-1} \cos \vartheta_2 \cdots (\cos \vartheta_{n-1})^{n-2}$ .
- Defina  $D'_n := (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2}$  y muestre que

$$\Phi_n : D'_n \rightarrow \Phi_n(D'_n)$$

es un  $C^\infty$ -difeomorfismo y que existe un conjunto  $N_n$  con medida de Lebesgue 0 tal que  $\Phi_{n+1}(D'_n) = \mathbb{R}^n \setminus N_n$ .

2. Sea  $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  la norma euclidiana de un vector  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Muestre

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d^n x = \pi^{n/2}. \quad (*)$$

3. Sea  $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ . Demuestre

- Para  $x > 0$  fijo, la función  $f_x : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_x(t) := e^{-t} t^{x-1}$  es Lebesgue-integrable.
- $\Gamma$  es de clase  $C^\infty$  y para  $x \in (0, \infty)$  y  $k \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty e^{-t} (\ln(t))^k t^{x-1} dt.$$

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  ( $x > 0$ ).
- $\Gamma(n+1) = n!$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

4. Sea  $\kappa_n$  el volumen de la bola unitaria en  $\mathbb{R}^n$ . Muestre para  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\kappa_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = \begin{cases} \frac{2^{k+1} \pi^k}{1 \cdot 3 \cdots (2k+1)}, & \text{si } n = 2k + 1 \text{ con } k \in \mathbb{N}_0, \\ \frac{\pi^k}{k!}, & \text{si } n = 2k \text{ con } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

*Hint.* Calcule la integral  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|z\|^2} dz$  utilizando coordenadas polares y compare con (\*).