

Teoría de Medida e Integración

Taller 9

Teorema de Fubini-Tonelli; Principio de Cavalieri.

Fecha de entrega: 21 de abril de 2022

1. Determine si las siguientes integrales existen y determine sus valores si posible:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy, \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx, \quad \int_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) d\lambda^2$$

para las funciones

(a) $f(x, y) = \frac{x - y}{(x + y)^3}, \quad x, y > 0,$

(b) $f(x, y) = \begin{cases} 2^{2n} & \text{si } 2^{-n} < x \leq 2^{-n+1}, 2^{-n} < y \leq 2^{-n+1}, \\ -2^{2n+1} & \text{si } 2^{-n-1} < x \leq 2^{-n}, 2^{-n} < y \leq 2^{-n+1}, \\ 0 & \text{en otros casos,} \end{cases}$

donde λ^2 es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^2 y las integrales iteradas son integrales en el sentido de Lebesgue.

2. Muestre que el plano $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ tiene medida de Lebesgue 0.
3. (a) *Principio de Cavalieri.* Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y $K_{x_n} := \{(x_j)_{j=1}^{n-1} : (x_j)_{j=1}^n \in K\}$ para todo $x_n \in \mathbb{R}$. Muestre que

$$\beta^n(K) = \int_{\mathbb{R}} \beta^{n-1}(K_x) d\lambda(x),$$

donde β^k es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^k .

- (b) Sea $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ compacto y $h > 0$. El cono con base B y altura h es definido por

$$C(B, h) := \{((1 - \lambda)x, \lambda h) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : x \in B, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Calcule el volumen $\beta^n(C(B, h))$ del cono $C(B, h)$.

4. Sea B el interior del elipse $4x^2 + y^2 = 4$. Calcule $\int_B y^2 d\lambda(x, y)$.