

Teoría de Medida e Integración

Taller 8

Convergencia.

Fecha de entrega: 07 de abril de 2022

En los problemas 1, 2 y 3 suponemos que todas las funciones f y f_n son medibles.

- Si f_n converge casi uniformemente, entonces existe una función medible f , tal que $f_n \rightarrow f$ μ -casi siempre.
 - Supongamos que $f_n \rightarrow f$ en medida y que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy para convergencia casi uniforme. Muestre que $f_n \rightarrow f$ casi uniformemente.
- Suponga que $f_n \rightarrow f$ en medida. Muestre que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge μ -casi siempre a f .
 - Muestre que el teorema de Lebesgue sigue siendo válido si suponemos $f_n \rightarrow f$ en medida en vez de $f_n \rightarrow f$ μ -casi siempre.
- Suponga que $\mu(X) < \infty$. Muestre que $f_n \rightarrow f$ en medida si y sólo si cada subsucesión de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión que converge μ -casi siempre a f . Muestre que en general no es equivalente si $\mu(X) = \infty$.
- De las siguientes sucesiones de funciones determine si convergen puntualmente, si convergen μ -casi siempre, si convergen en medida, si convergen casi uniforme, si convergen en \mathcal{L}_p . Si convergen, halle la función límite.

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n = \chi_{[n, \infty)},$$

$$g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_n = \chi_{[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]}, \quad \text{con } n = 2^k + j \quad (j = 0, \dots, 2^k - 1),$$

$$h_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ 2n - n^2 x, & 1/n < x \leq 2/n, \\ 0, & 2/n < x \leq 1. \end{cases}$$