

# Teoría de Medida e Integración

## Taller 8

Teorema Lebesgue. Convergencia.

Fecha de entrega: 31 de marzo de 2022

---

1. Para  $a > 0$  y  $t > 0$  muestre para las integrales impropias de Riemann:

$$\int_0^\infty \frac{t}{t^2 + x^2} \cos(ax) dx = \frac{\pi}{2} e^{-at}, \quad \int_0^\infty \frac{x}{t^2 + x^2} \sin(ax) dx = \frac{\pi}{2} e^{-at}.$$

¿Existen las integrales como integrales de Lebesgue?

*Hint.* Para la primera integral, muestre que la función

$$f_a(t) := \int_0^\infty \frac{t}{t^2 + x^2} \cos(ax) dx$$

satisface la ecuación diferencial  $f_a'' = a^2 f_a$  derivando bajo la integral y utilizando integración por partes.

2. *Lema de Riemann-Lebesgue.* Sea  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$  y  $\tilde{f}$  su transformada de Fourier. Muestre que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{f}(t) = 0$ .

*Hint.* Muestre la afirmación primero para funciones simples.

3. Sea  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo y sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  localmente Riemann-integrable (es decir, su restricción a cualquier compacto es Riemann-integrable). Demuestre que  $f$  es Lebesgue-integrable si y sólo si la integral impropia de Riemann de  $|f|$  sobre  $I$  existe y que en este caso la integral de Riemann de  $f$  coincide con la integral de Lebesgue de  $f$ .

Caso especial: Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  localmente Riemann-integrable. Entonces  $f$  es Lebesgue-integrable si y sólo si la integral impropia de Riemann

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x)| dx$$

existe y en este caso,  $R\text{-}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$ , donde  $\lambda$  es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ .

4. Sea  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{-x}$ . Demuestre que  $f$  es Lebesgue integrable y calcule su integral.

---

Puede usar que una función que está definida en un intervalo compacto y que es Riemann integrable también es Lebesgue integrable, y que una función definida en un intervalo compacto es Riemann integrable si y sólo si el conjunto donde no es continua tiene medida de Lebesgue 0.

---