Universidad de los Andes
MATE-4220

Teoría de Medida e Integración

Taller 5

Funciones simples; integración. Fecha de entrega: 03 de marzo de 2022

---

1. Sea $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_0(x) = x$. Defina la secuencia de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ donde:

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x-2) & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

   (a) Demuestre que existe una función $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a G.[1]

   (b) *Ejercicio voluntario:* Pruebe que G es uniformemente continua y creciente. Si C es el conjunto de Cantor pruebe que G es constante en cada intervalo abierto de $[0,1] \setminus C$ y que $G(C) = [0,1]$.

   (c) Para cualquier subconjunto $A \subset [0,1]$, $G^{-1}(A)$ es Lebesgue-medible.

   (d) Considere $f(x) = x + G(x)$. Muestre que $\lambda(f(C)) = 1$. Usando el Ejericico 4(c) del taller 4 tome V no Lebesgue-medible $V \subset f(C)$ y pruebe que $f^{-1}(V)$ es Lebesgue-medible pero no de Borel (note que f es estrictamente creciente).

2. Sea $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ como en el problema 1 del taller 3. Determine todas las funciones medibles $f : X \to [0,\infty]$ y su integral $\displaystyle\int_X f \,\mathrm{d}\mu$.

3. Sea $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ un espacio de medida no completo y sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones tal que $f = g$ μ-casi siempre. Se puede concluir que

$$f \text{ medible} \quad \Longleftrightarrow \quad g \text{ medible ?}$$

4. Sea $(X, \mathfrak{M})$ un espacio medible. Una función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ se llama *simple* si es medible y si su imagen es finito.

   (a) Demuestre que $E(X, \mathfrak{A}) := \{\varphi : X \to \mathbb{R} : \varphi \text{ es función simple}\}$ es un espacio vectorial.

   (b) Suponga que $\mu(X) < \infty$. Demuestre que

$$I : E(X, \mathfrak{A}) \to \mathbb{R}, \quad I\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$

   es una función lineal y que existe una constante $C \geq 0$ tal que $|I(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_\infty$.

---

[1] Observe que si en vez de f_0 tomamos cualquier función g_0 acotada, la misma construcción converge uniformemente a la misma función G, que se llama la función de Cantor.