

# Teoría de Medida e Integración

Taller 3

Extensión de una medida; conjunto de Cantor.

Fecha de entrega: 17 de febrero de 2022

---

1. Sea  $X$  un conjunto no contable y defina

$$\mathfrak{M} := \{E \subset X : E \text{ contable o } X \setminus E \text{ contable}\},$$

$$\mu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mu(E) := \begin{cases} 0, & E \text{ contable,} \\ 1, & X \setminus E \text{ contable.} \end{cases}$$

- (a) Muestre que  $\mathfrak{M}$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $\mu$  es una medida sobre  $\mathfrak{M}$ .
- (b) Determine la medida exterior  $\mu^*$ .

2. Para  $\mu : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  contenido sobre un semianillo  $H$ , denotamos con  $\mu^*$  la medida exterior generada por  $\mu$ , y con  $\mathfrak{A}_{\mu^*}$  la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos  $\mu^*$ -medibles.

Sean  $\mu, \nu : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  contenidos sobre un semianillo  $H$ . Muestre:

- (a)  $(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*$ .
- (b)  $\mathfrak{A}_{(\mu+\nu)^*} \supseteq \mathfrak{A}_{\mu^*} \cap \mathfrak{A}_{\nu^*}$ .
- (c) ¿Siempre es cierto que  $\mathfrak{A}_{(\mu+\nu)^*} = \mathfrak{A}_{\mu^*} \cap \mathfrak{A}_{\nu^*}$ ?

3. Sea  $H$  un semianillo sobre  $X$ ,  $\sigma(H)$  la  $\sigma$ -álgebra generada por  $H$  y sean  $\mu, \nu : \sigma(H) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  medidas con

- (i)  $\mu(A) \leq \nu(A)$  para todo  $A \in H$ .
- (ii)  $\nu|_H$  es  $\sigma$ -finita.

Muestre que  $\mu(B) \leq \nu(B)$  para todo  $B \in \sigma(H)$ .

4. Un conjunto de Borel, no contable, con medida de Lebesgue 0.

$$T := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} : x_n \in \{0, 2\} \right\} =: \text{conjunto de Cantor.}$$

- (a) Muestre que  $T$  es cerrado, en particular es un conjunto de Borel.
- (b) Muestre que  $\lambda(T) = 0$ , donde  $\lambda$  es la medida de Lebesgue.
- (c) Muestre que  $T$  no es contable.